

Semaine 8:  
**Magnétostatique 2**

# Dipôle magnétiques des atomes et des molécules

Les moments de dipôle magnétiques des atomes et des molécules dérivent de:

- 1) le moment angulaire orbital des électrons
- 2) le moment angulaire intrinsèque (de spin) des électrons, des protons et des neutrons.

Formellement:

**Moment de dipole magnetique orbitale**

$$\mathbf{m} \equiv \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N q_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k)$$

$$\mathbf{L}_k \equiv m_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k) \quad (\text{moment angulaire orbitale de la particule } k)$$

$$\Rightarrow \mathbf{m}_L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{2m_k} \mathbf{L}_k$$

Si toutes les particules ont le même rapport charge sur masse:

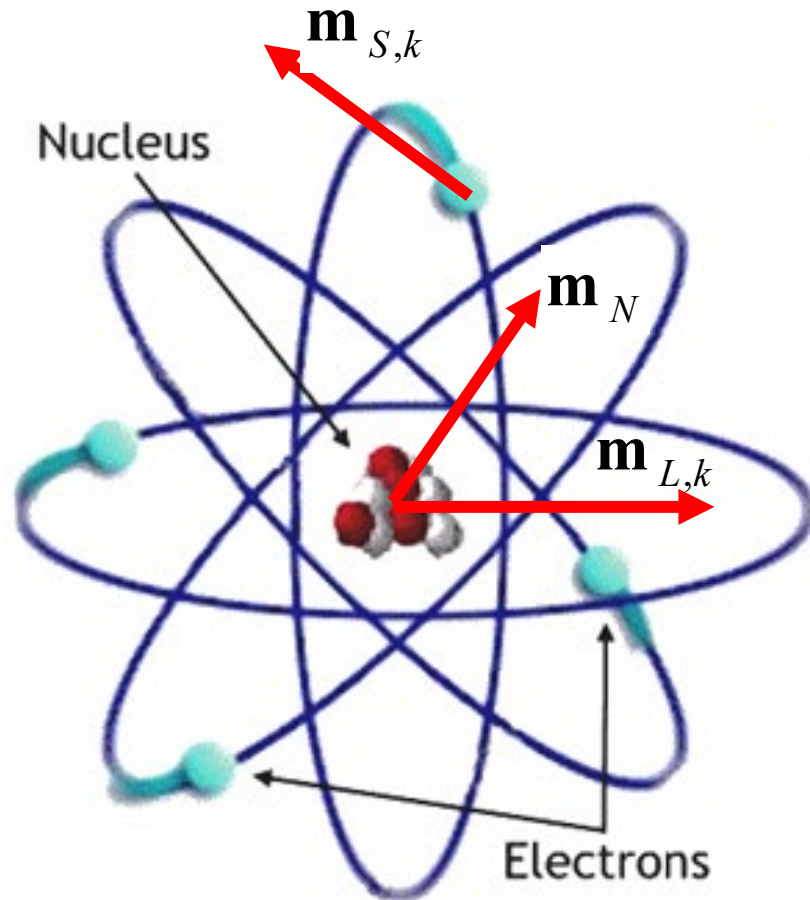
$$\mathbf{m}_L = \frac{q}{2m} \sum_{k=1}^N \mathbf{L}_k = \frac{q}{2m} \mathbf{L} \quad (\mathbf{L} = \sum_{k=1}^N \mathbf{L}_k \text{ est le moment angulaire orbitale totale})$$

**Moment de dipole magnetique intrisique (ou spin)**

Aucune "analogie de physique classique" précise:

$$\mathbf{m}_S = g \frac{q}{2m} \mathbf{S} \quad (\mathbf{S} \text{ moment angulaire de spin})$$

# Dipôle magnétique de l'atome



$\mathbf{m}_{L,k}$ : Moment magnétique orbital de l'électron  $k$

$\mathbf{m}_{S,k}$ : Moment magnétique intrinsèque de l'électron  $k$

$\mathbf{m}_N$ : Moment magnétique du noyau

$$\mathbf{m}_{S,k} \cong \mathbf{m}_{L,k} \quad \mathbf{m}_N \ll \mathbf{m}_{S,k}, \mathbf{m}_{L,k}$$

Moment magnétique total de l'atome  $i$   $\mathbf{m}_i$ :

$$|\mathbf{m}_i| \cong \alpha \mu_B \quad \alpha \in [0, 10]$$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \cong 9.24 \times 10^{-24} \text{ Am}^2$$

Note:

"courant atomique équivalente"

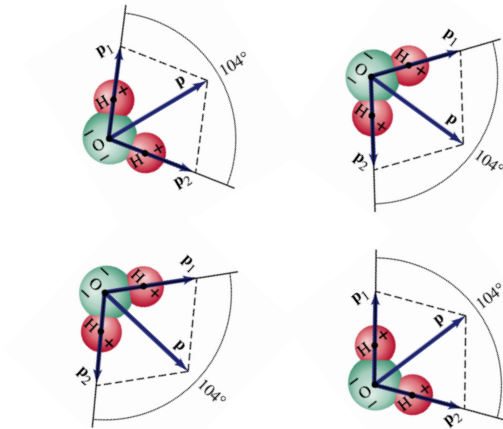
$$I \approx \frac{\mu_B}{S} \approx \frac{10^{-23} \text{ Am}^2}{10^{-20} \text{ m}^2} = 10^{-3} \text{ A}$$

"vitesse équivalente"

$$v \approx \frac{2\pi RI}{e} \approx \frac{10^{-9} \text{ m} \times 10^{-3} \text{ A}}{10^{-19} \text{ C}} \approx 10^7 \text{ m/s}$$

### Matériaux «diélectriques»:

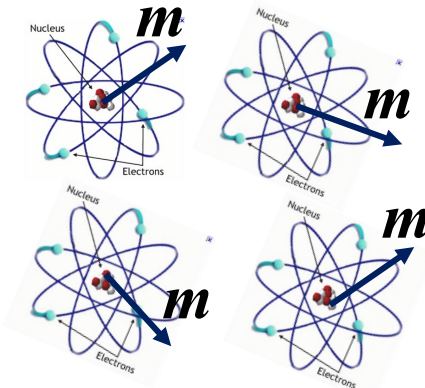
composés de **dipôles électriques** microscopiques  
(induits par  $\mathbf{E}$  ou permanents)



Dimensions  
d'un atome ou  
d'une molécule

### Matériaux «magnétiques»:

composés de **dipôles magnétiques** microscopiques  
(induits par  $\mathbf{B}$  ou permanentes)

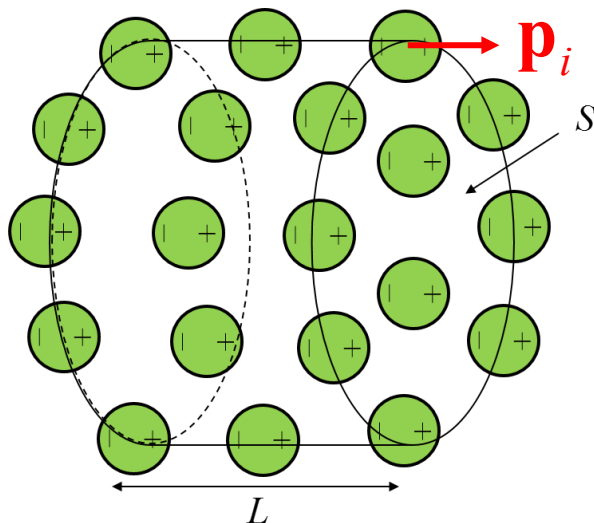


## Polarisation: le vecteur $\mathbf{P}$

**Polarisation:**  
moment électrique dipolaire  
par unité de volume

$$\mathbf{P} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\Delta V} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{LS}$$

$$[\mathbf{p}_i] = \text{Cm}; \quad [\mathbf{P}] = \text{C/m}^2$$

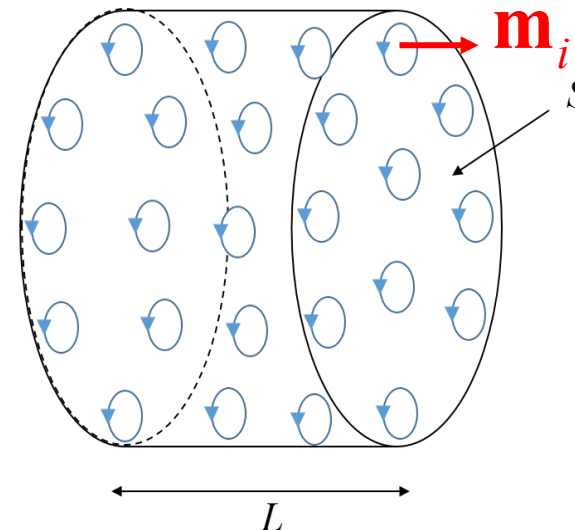


## Aimantation: le vecteur $\mathbf{M}$

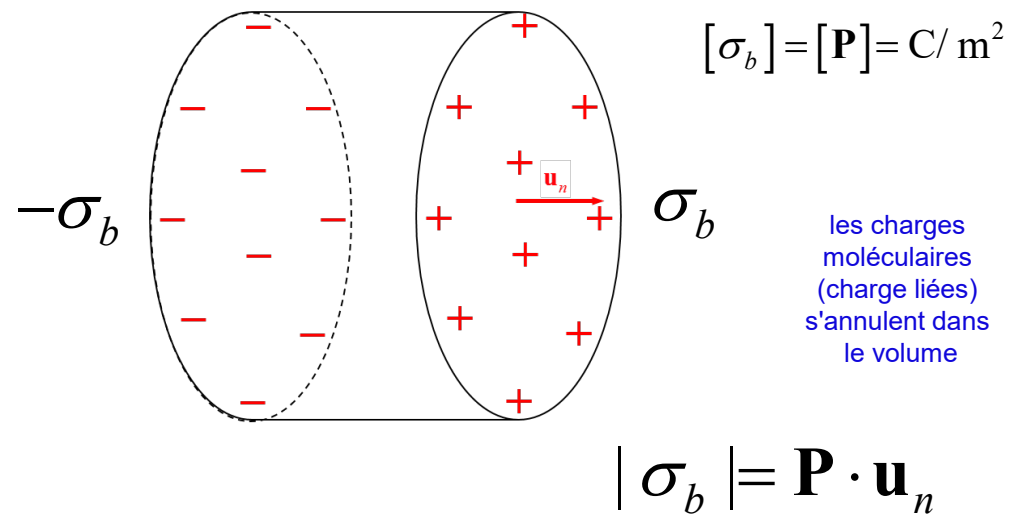
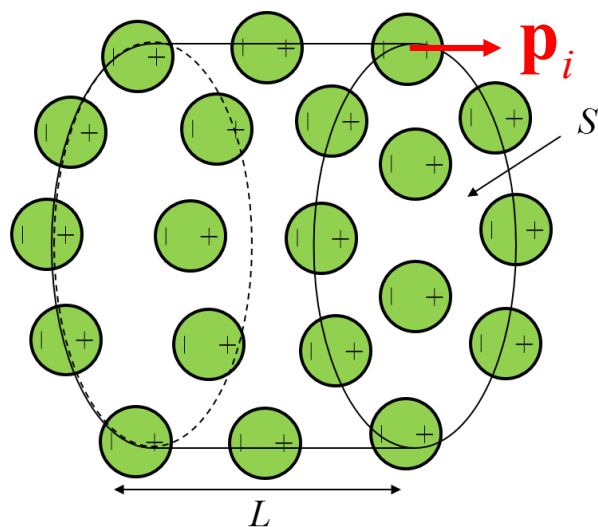
**Aimantation:**  
moment magnétique dipolaire  
par unité de volume

$$\mathbf{M} = \frac{\sum_i \mathbf{m}_i}{\Delta V} = \frac{\sum_i \mathbf{m}_i}{LS}$$

$$[\mathbf{m}_i] = \text{Am}^2; \quad [\mathbf{M}] = \text{Am}^{-1}$$

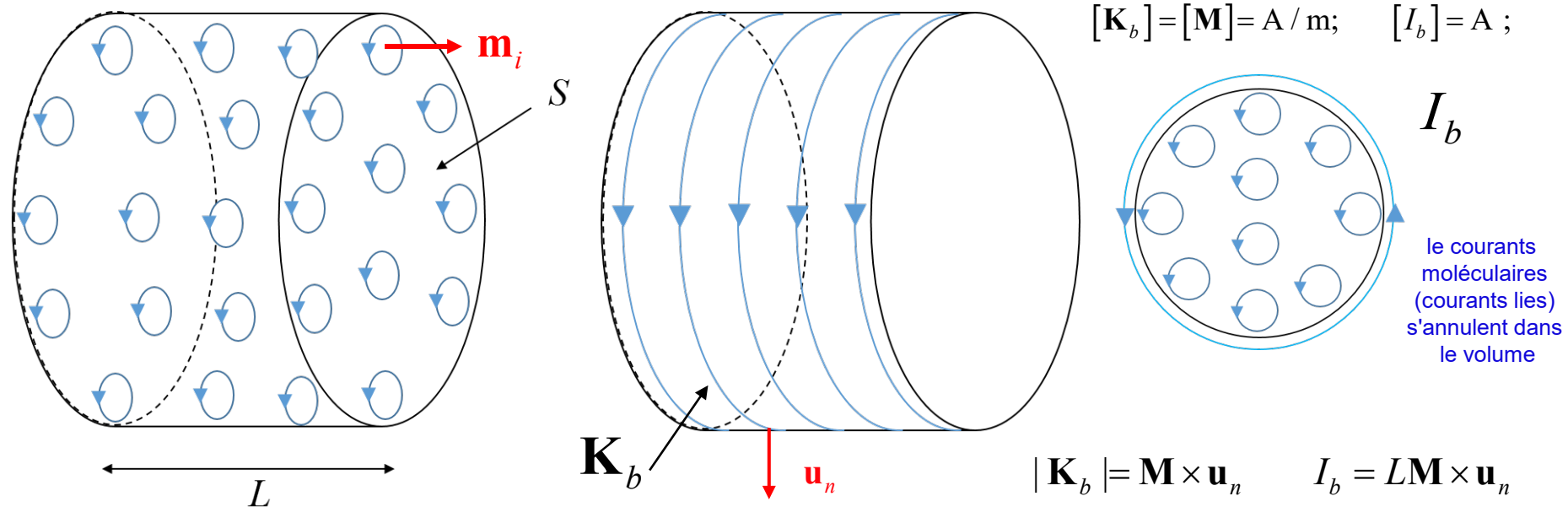


«Modèle équivalent» avec «charges liées de surface»:



Densité de surface des charges "liées" (bound):  $\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n$

«Modèle équivalent» avec «courants liés de surface»:



Densité de surface des courants "liés" (bound):  $|K_b| = M \times u_n$

# Susceptibilité et Perméabilité

## Analogie Electrique Magnétique

Toujours valable:  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$

Matériau linéaire:  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$

$\Rightarrow$

$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$

$\chi_e$ : susceptibilité électrique

$\epsilon_r$ : permittivité électrique relative  
(constante diélectrique relative)

Toujours valable:  $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$

Matériau linéaire:  $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$

$\Rightarrow$

$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$

$\chi_m$ : susceptibilité magnétique

$\mu_r$ : perméabilité magnétique relative

# Types de magnétisme

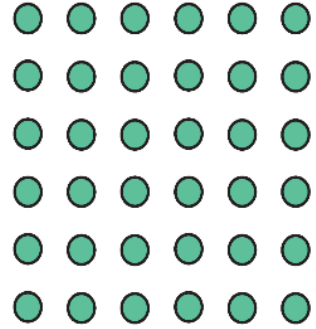
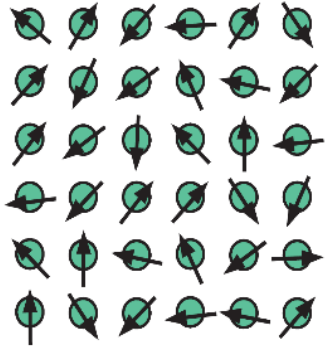
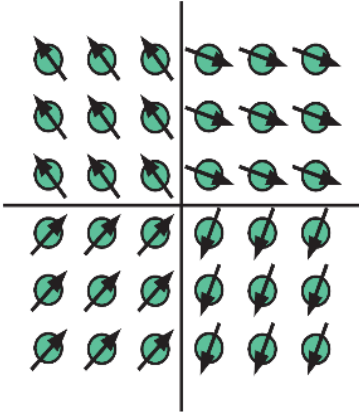
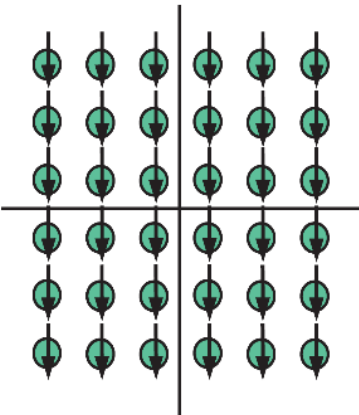
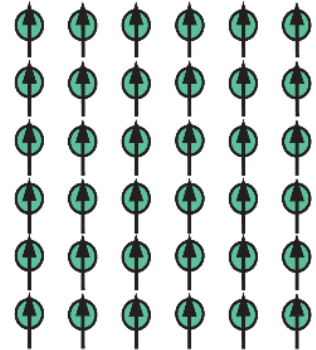
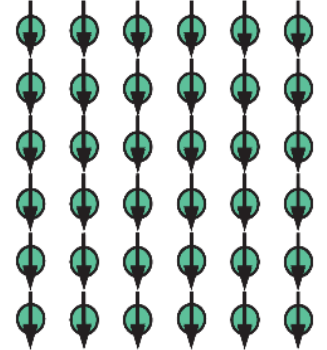
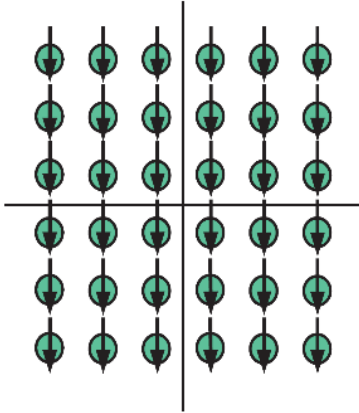
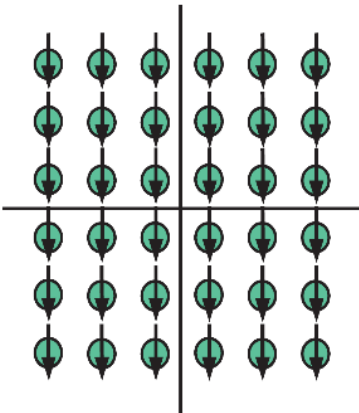
$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

$\chi_m$  : Susceptibilité magnétique

Type	Valeurs typiques	Origine physique
Diamagnétisme	$\chi_m \approx -10^{-6}$	Dipôles magnétiques «induits» non couplés
Paramagnétisme	$\chi_m \approx +(10^{-5} \div 10^{-3})$	Dipôles magnétiques «permanents» non couplés
Ferromagnétisme	$\chi_m \approx +(0 \div 10^6)$	Dipôles magnétiques «permanents» couplés

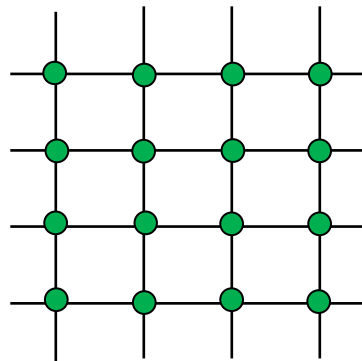
Susceptibilité magnétique  
(à T=293 K, 1 atm)

Material	Susceptibility	Material	Susceptibility
<i>Diamagnetic:</i>		<i>Paramagnetic:</i>	
Bismuth	$-1.7 \times 10^{-4}$	Oxygen (O <sub>2</sub> )	$1.7 \times 10^{-6}$
Gold	$-3.4 \times 10^{-5}$	Sodium	$8.5 \times 10^{-6}$
Silver	$-2.4 \times 10^{-5}$	Aluminum	$2.2 \times 10^{-5}$
Copper	$-9.7 \times 10^{-6}$	Tungsten	$7.0 \times 10^{-5}$
Water	$-9.0 \times 10^{-6}$	Platinum	$2.7 \times 10^{-4}$
Carbon Dioxide	$-1.1 \times 10^{-8}$	Liquid Oxygen (-200° C)	$3.9 \times 10^{-3}$
Hydrogen (H <sub>2</sub> )	$-2.1 \times 10^{-9}$	Gadolinium	$4.8 \times 10^{-1}$

	DIAMAGNETIC	PARAMAGNETIC	FERROMAGNETIC SOFT (IDEAL)	FERROMAGNETIC HARD (IDEAL)
$B = 0$				
$B \downarrow$ $mB \gg kT$				

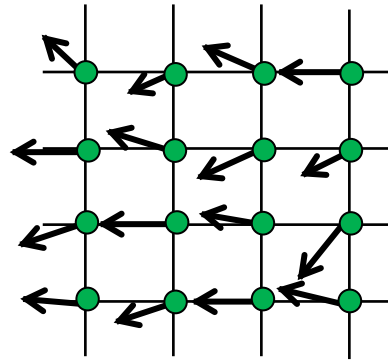
# Diamagnétisme et Paramagnétisme

$$\mathbf{B} = 0$$



$$\mathbf{M} = 0$$

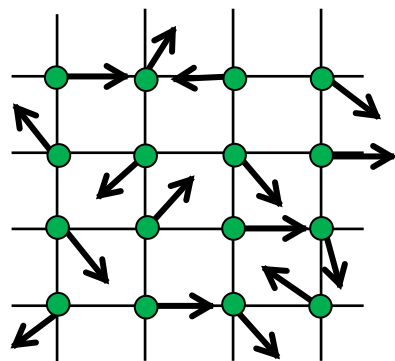
$$\mathbf{B} \neq 0$$



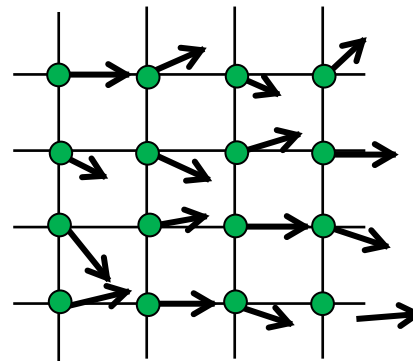
$$\mathbf{M} \neq 0$$

## Atomes Diamagnétiques

- Atome sans dipôle magnétique «permanent».
- ← ● Atome avec dipôle magnétique «induit»



$$\mathbf{M} = 0$$



$$\mathbf{M} \neq 0$$

## Atomes Paramagnétiques

- ← ● Atome avec dipôle magnétique «permanent».



Note:

On peut montrer que, pour un matériau diamagnétique:

$$\mathbf{M} = -\frac{ne^2\mu_0}{6m_e} \left( \sum_i r_i^2 \right)_{\text{moy}} \mathbf{H} \quad \Rightarrow \quad \chi_m = -\frac{ne^2\mu_0}{6m_e} \left( \sum_i r_i^2 \right)_{\text{moy}}$$

$n$  : nombre d'atomes par unité de volume [ $\text{m}^{-3}$ ]

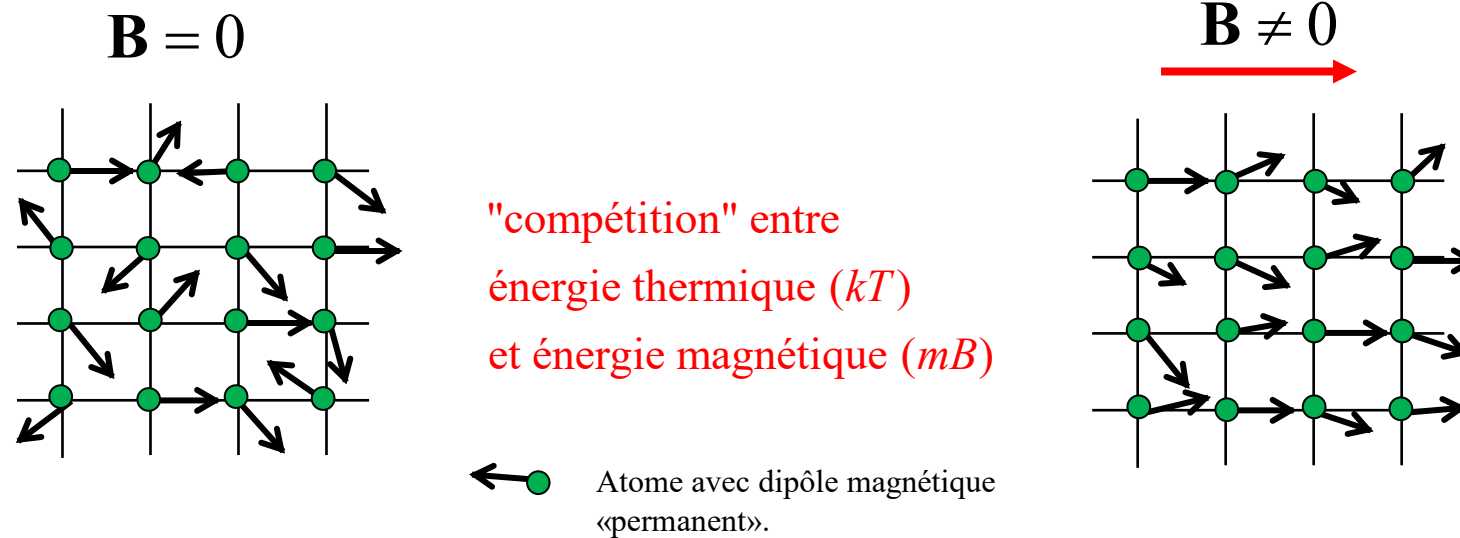
$r_i$  : distance du  $i^{\text{ème}}$  électron au noyau de l'atome [m]

$m_e$  : masse de l'électron [kg]

$e$  : charge de l'électron [C]

# Paramagnétisme

Dipôles magnétiques «permanents» non couplés



$$\mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{m}_i \neq 0, \mathbf{M} = 0$$

$\mathbf{B} \neq 0 \Rightarrow$  Un champ magnétique exerce un couple  $\mathbf{m} \times \mathbf{B}$  qui tend à aligner les dipôles magnétiques le long du champ  $\mathbf{B}$  (le système a tendance à minimiser l'énergie potentielle magnétique  $U_B = - \sum_i \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{B}$ ),

Les mouvements moléculaire aléatoires dûs à la température tendent à contrebalancer l'effet d'alignement dû au champ magnétique.

(l'énergie thermique ( $U_{th} \cong kT$ ) tend à orienter les moments magnétiques de façon aléatoire).

Le résultat finale est:

$$\mathbf{M} // \mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{M} \equiv \chi_m \mathbf{H} \quad \text{with} \quad \chi_m > 0$$

Note.

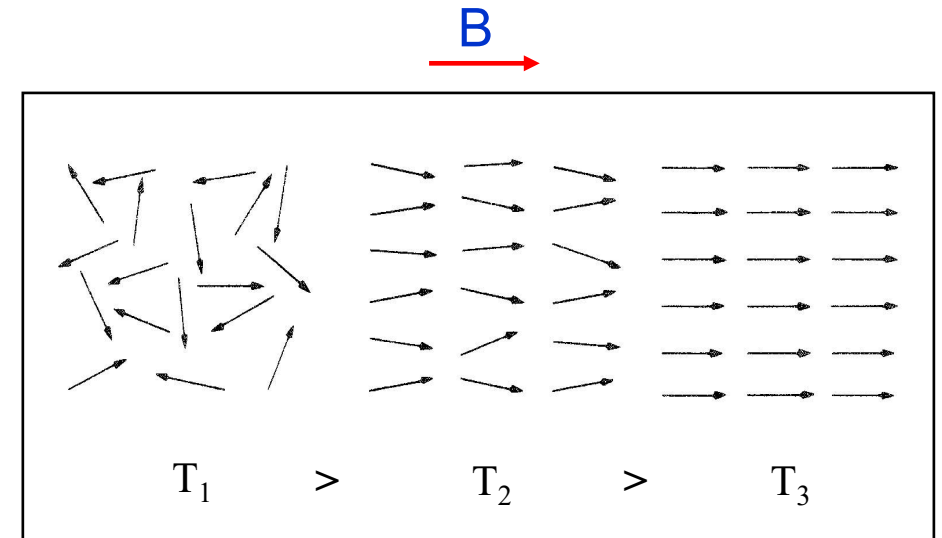
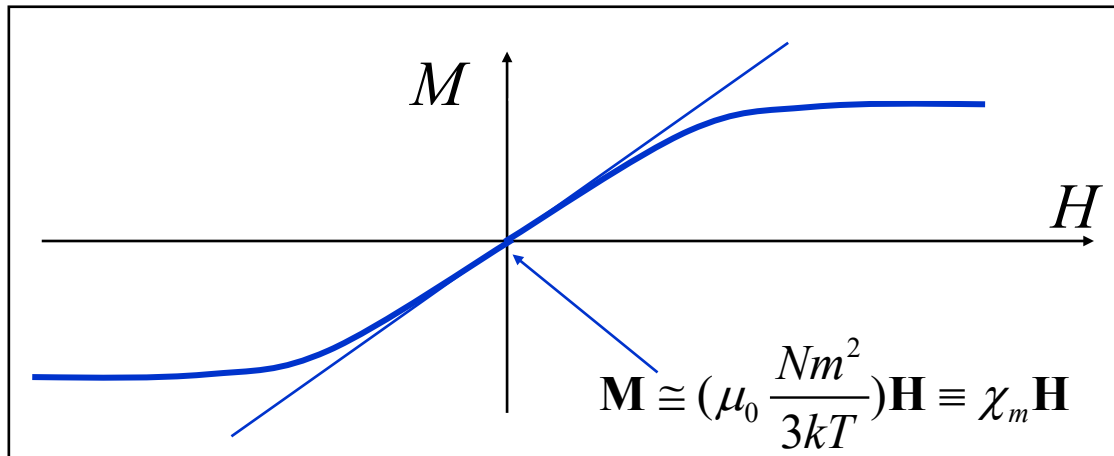
On peut montrer que, pour un matériau paramagnétique:

$$\mathbf{M} = Nm \left[ \coth\left(\frac{\mu_0 m H}{kT}\right) - \frac{kT}{\mu_0 m H} \right] \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}$$

$$\text{Pour } \frac{\mu_0 m H}{kT} \ll 1 \Rightarrow \mathbf{M} \cong \frac{Nm^2 \mu_0 \mathbf{H}}{3kT} \Rightarrow \chi_m = \frac{Nm^2 \mu_0}{3kT} \quad \frac{\mu_0 m H}{kT} \gg 1 \Rightarrow \mathbf{M} \cong Nm$$

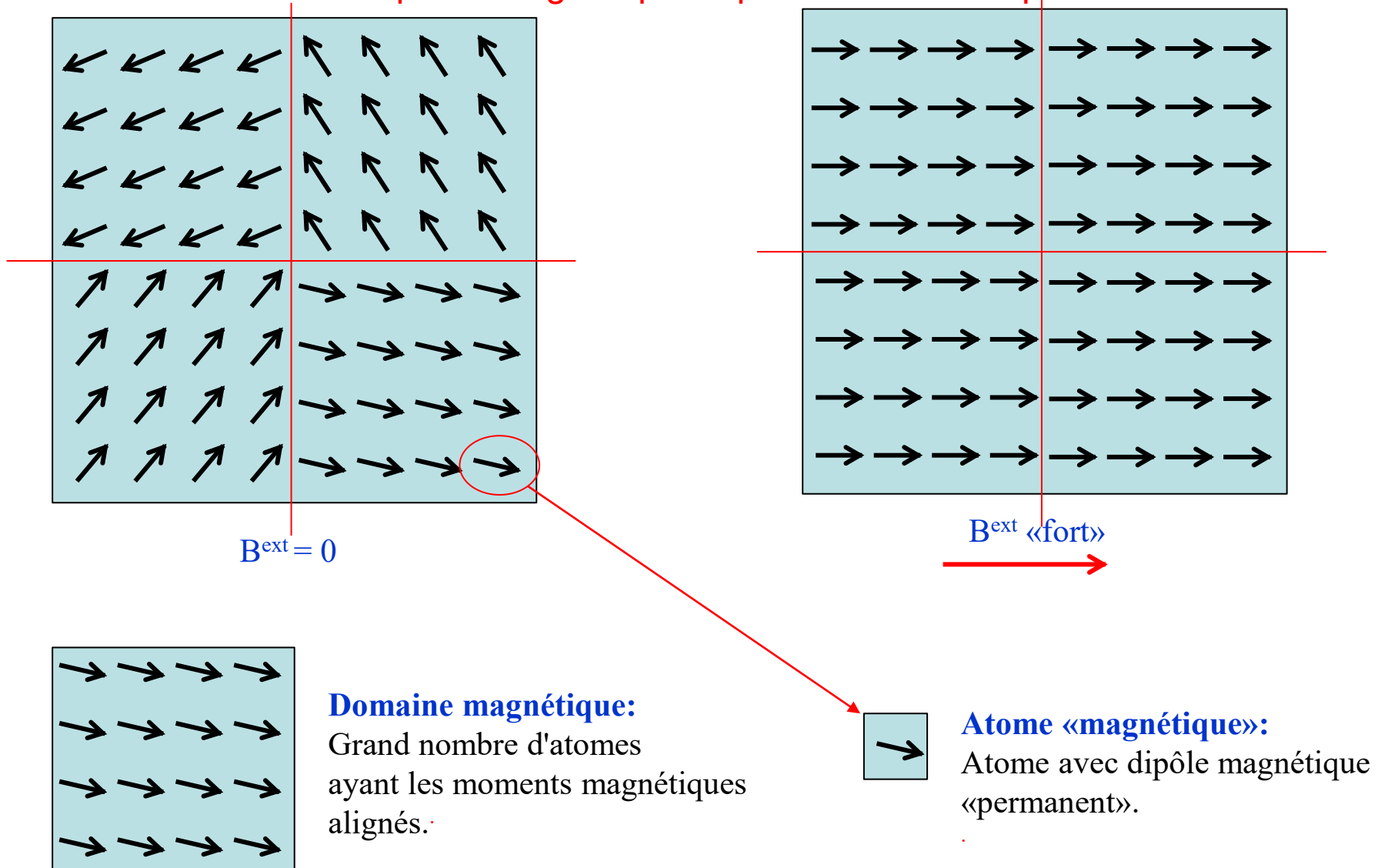
$$\text{Pour } x \ll 1: \coth(x) - \frac{1}{x} \cong \frac{1}{3}x$$

Loi de Curie

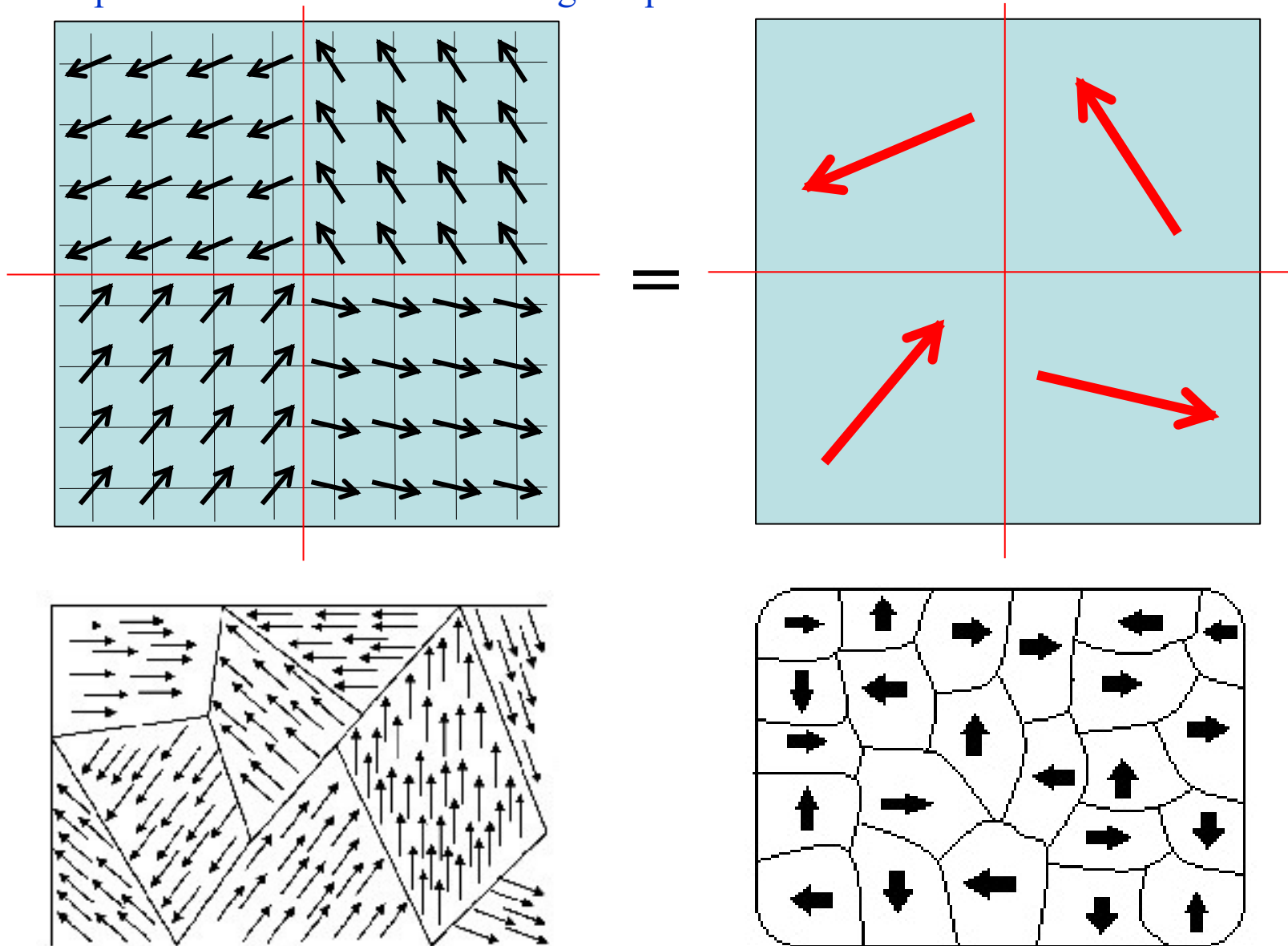


# Ferromagnétisme

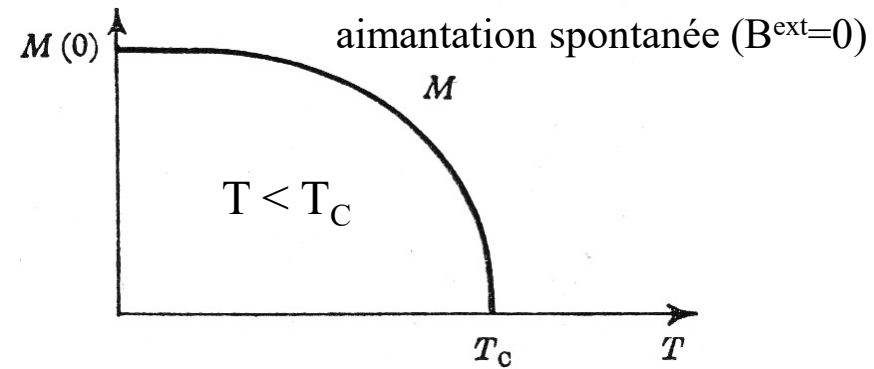
Dipôles magnétiques «permanents» couplés



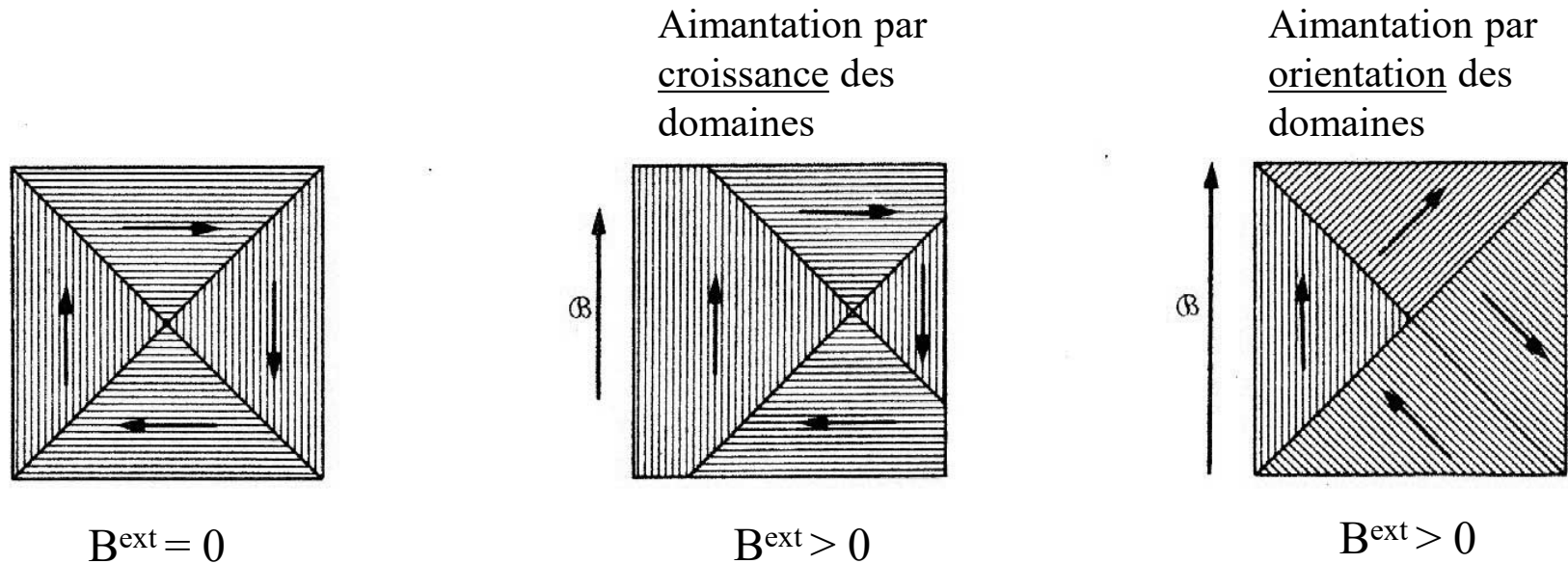
## Représentation des domaines magnétiques



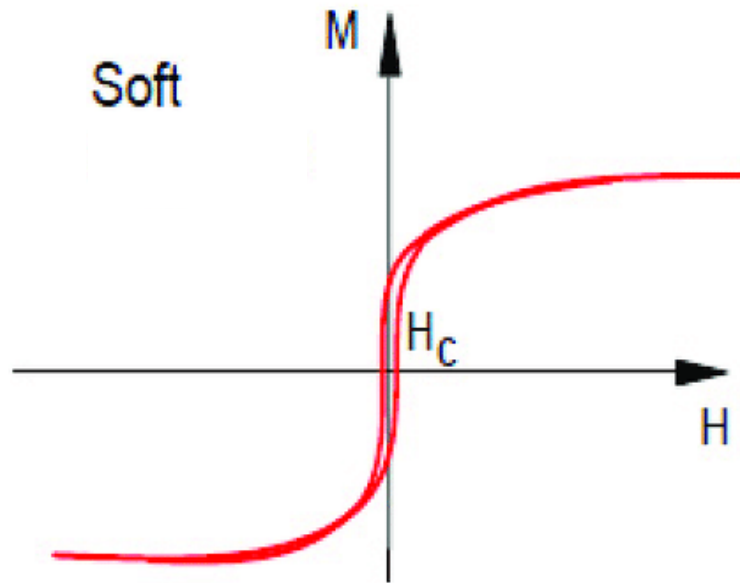
## Aimantation dans les domaines magnétiques vs température:



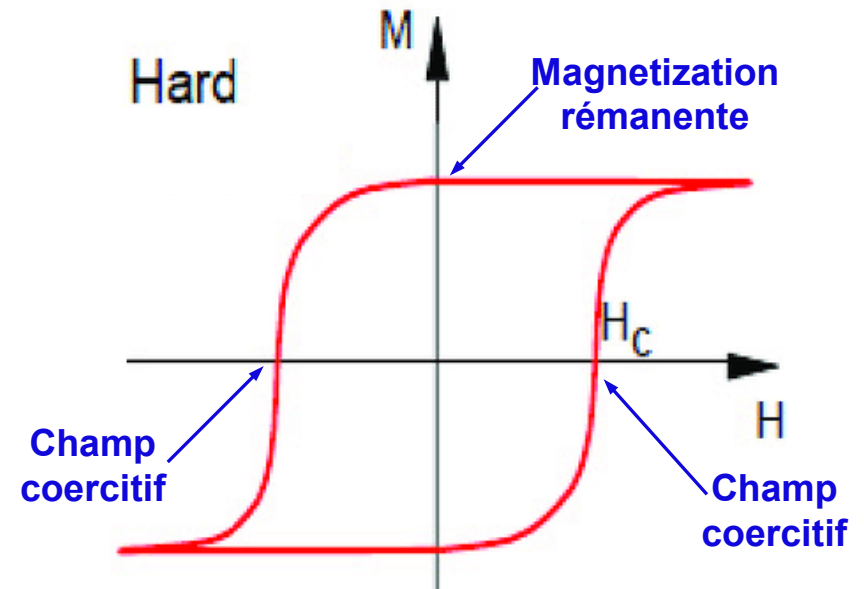
## Aimantation dans les domaines magnétiques vs champs magnétique:



# Soft and hard ferromagnetic materials



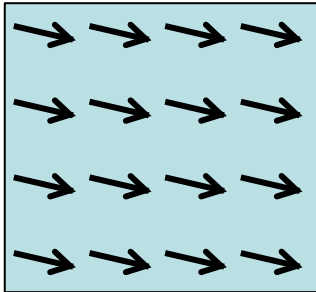
Magnétisation rémanente: très faible  
 Hystérésis: très faible  
 Champ coercitif: très faible



Magnétisation rémanente : très grande  
 Hystérésis: très grande  
 Champ coercitif: très grande

# Ferromagnétique, Antiferromagnétique, Ferrimagnétique

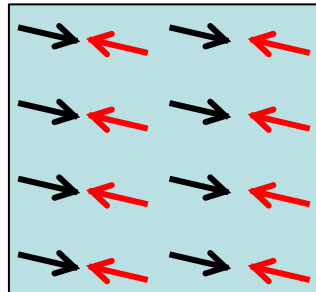
## Domaine magnétique



### Ferromagnétique:

Les moments magnétiques des tous les atomes sont parallèles.

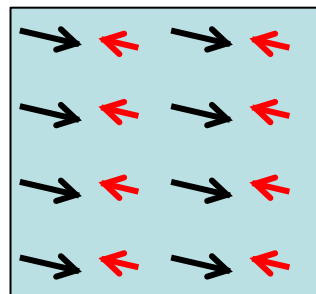
$$\mathbf{M} \neq 0$$



### Antiferromagnétique:

Les moments magnétiques des atomes sont tous de même amplitude mais sont antiparallèles.

$$\mathbf{M} = 0$$

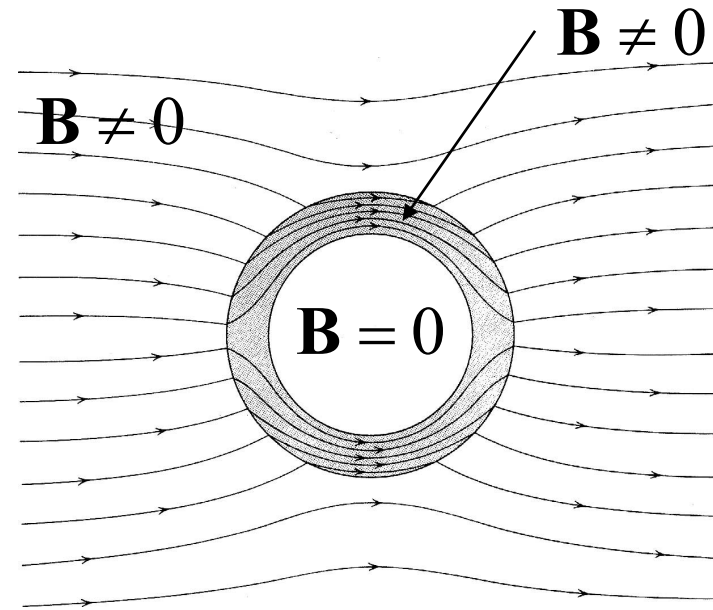


### Ferrimagnétique:

Les moments magnétiques des atomes sont d'amplitude différentes et sont antiparallèles.

$$\mathbf{M} \neq 0$$

# Ecrantage magnétique



Ecrantage ( $B=0$  à l'intérieur de la «boîte»):

Les dipôles magnétiques dans le matériau sont orientés de telle manière qu'ils produisent un champ de grandeur égale mais de sens opposé par rapport au champ externe.

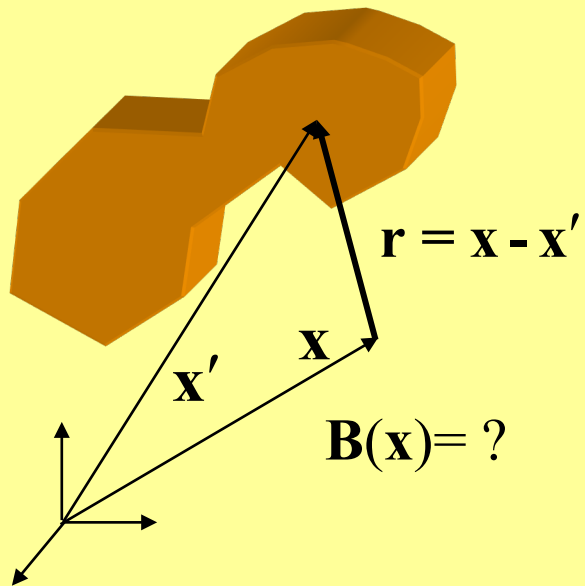
Le champ magnétique total à l'intérieur de la boîte est nul.

Un possible matériau: «mu-métal» (alliages avec  $\sim 80\%$  Ni):  $\mu_r \sim 100000$

# Champ magnétique créé par un objet magnétisé

## Problème:

A partir de  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ ,  
obtenir  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$

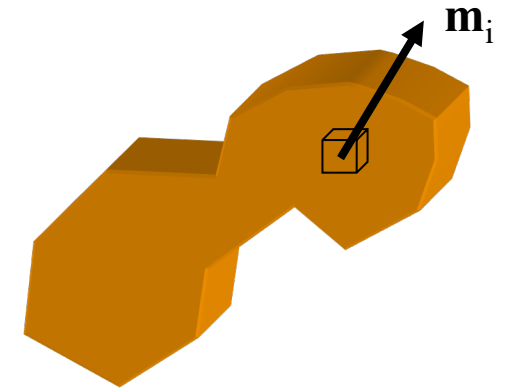


## 1. Méthode des «dipôle magnétiques»

$\mathbf{B}$  d'un dipôle magnétique  $\mathbf{m}_i$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m}_i \cdot \hat{\mathbf{r}}_i)\hat{\mathbf{r}}_i - \mathbf{m}_i}{|\mathbf{r}_i|^3} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{3(\mathbf{M}(\mathbf{x}') \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{r}|^3} dV$$



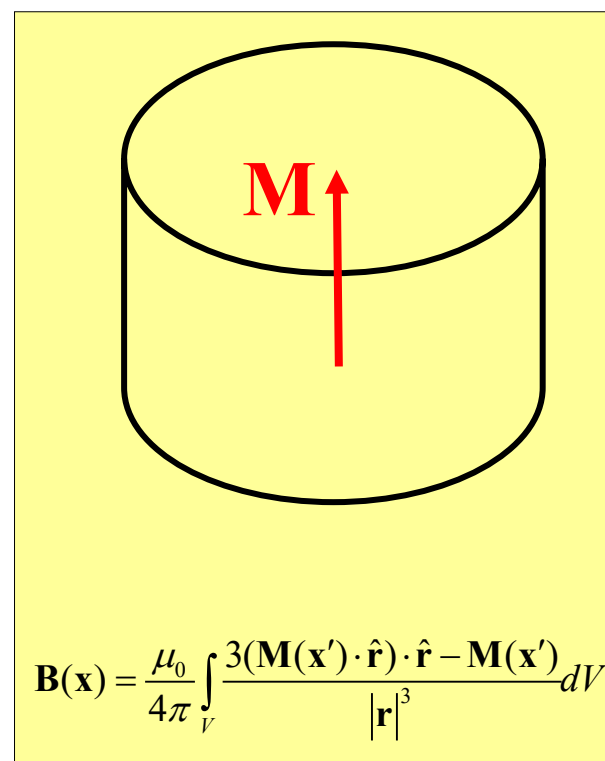
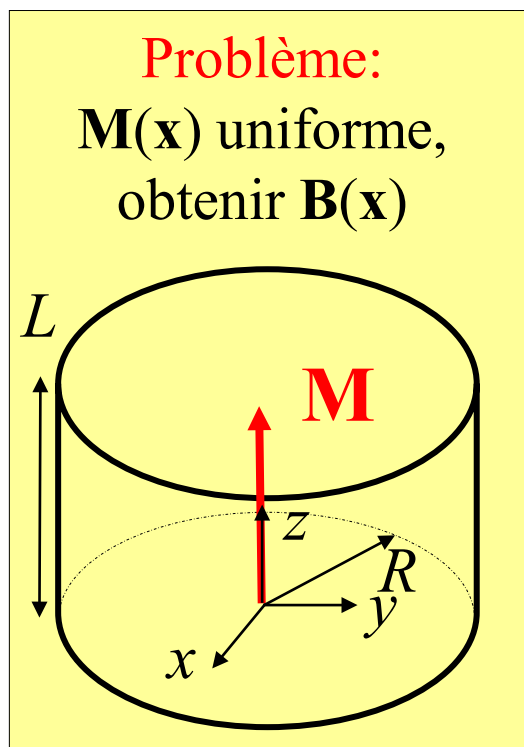
## 2. Méthode des «courants de surface lié»

**CURIOSITY**

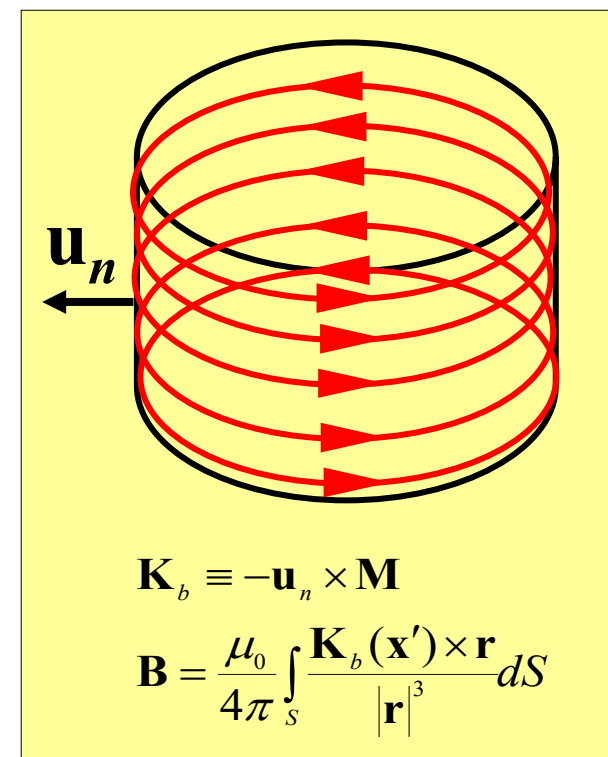
$$\mathbf{K}_b \equiv -\mathbf{u}_n \times \mathbf{M}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K}_b(\mathbf{x}') \times \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2} dS$$

## Exemple: cylindre uniformément magnétisé



Méthode 1



Méthode 2

Pour  $z \gg R, L$  et  $\mathbf{r} \cong (0, 0, z)$

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{3(\mathbf{M}(\mathbf{x}') \cdot \hat{\mathbf{r}}) \cdot \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{r}|^3} dV \cong \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{2Mz^2 \hat{\mathbf{z}}}{|z|^5} dV \cong \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{z^3} M \pi R^2 L \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{MR^2 L}{z^3} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{m}}{z^3}$$

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K}_b(\mathbf{x}') \times \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2} dS \cong \frac{\mu_0 I_b R^2}{2z^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{m}}{z^3}$$

# Rappel sur «force» et «couple» sur le dipôle électrique e le dipôle magnétique

Les équations des **forces** et des **couples**  
sont toutes dérivée à partir de la **force de Lorentz**  
(la force électromagnétique)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F} = \int_V (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV \\ \mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \\ \mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N} = \int_V (\mathbf{r} \times \rho\mathbf{E} + \mathbf{r} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B})) dV \\ \mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \\ \mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \end{array} \right.$$

**Note:** (voir aussi Z 96, G 171, Z 373, P 478, P 538)

L'expression générale pour la **force magnétique** exercée sur une distribution de courants est:

$$\mathbf{F} = \int_V (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV$$

Si le corps est beaucoup plus petit que l'échelle de variation du champ  $\mathbf{B}$ , on peut le décrire par un moment totale  $\mathbf{m}$ . Dans ce cas la force est :

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

Si, en plus,  $\mathbf{m}$  est un vecteur constant et  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$  (i.e.,  $\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t = 0$ ), la force est aussi:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad \text{Math : } \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{m}) + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{m} \\ &\Rightarrow \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = 0 + 0 + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} + 0 = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} \end{aligned}$$

L'expression générale pour la **force électrique** exercée sur une distribution de charges est:

$$\mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{E} dV$$

Si le corps est beaucoup plus petit que l'échelle de variation du champ  $\mathbf{E}$ , on peut le décrire par un moment totale  $\mathbf{p}$ . Dans ce cas la force est :

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

Si, en plus,  $\mathbf{p}$  est un vecteur constant et  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  (i.e.  $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ ), la force est aussi:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \quad \text{Math : } \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) &= \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{p}) + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{p} \\ &\Rightarrow \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = 0 + 0 + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} + 0 = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} \end{aligned}$$

## Force sur un objet magnétique dans un champ $\mathbf{B}$

Si  $\mathbf{B}$  ne varie pas trop vite sur le volume de objet magnétique:

$$B_i(\mathbf{x}) = B_i(0) + \mathbf{x} \cdot \nabla B_i(0) \quad (i = x, y, z)$$

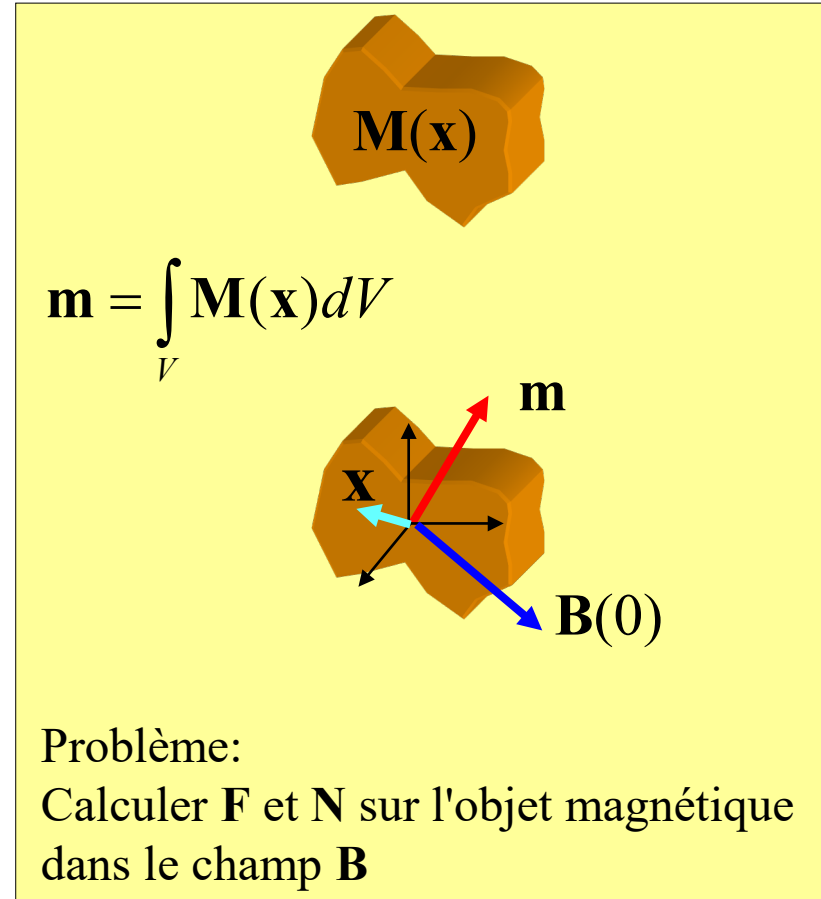
où  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  est le champ appliqué de l'extérieur

Avec cette hypothèse, nous pouvons démontrer que:

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad \text{Force}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad \text{Couple}$$

$$U_B = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad \text{Energie potentielle}$$



$\mathbf{m} = \int_V \mathbf{M}(\mathbf{x}) dV$

Problème:  
Calculer  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{N}$  sur l'objet magnétique dans le champ  $\mathbf{B}$

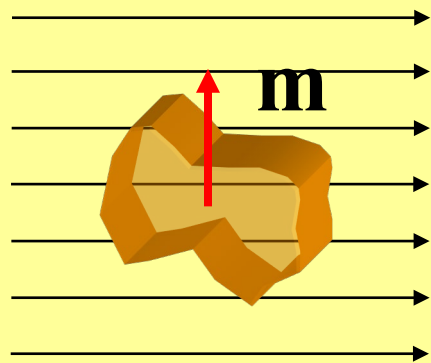
$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Force

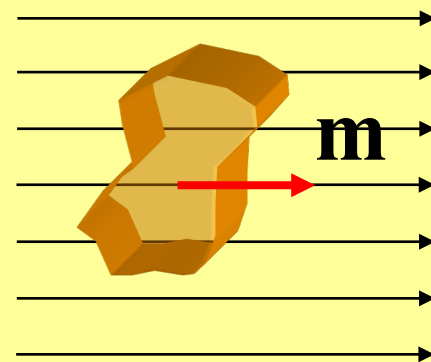
Couple

### Champ magnétique uniforme

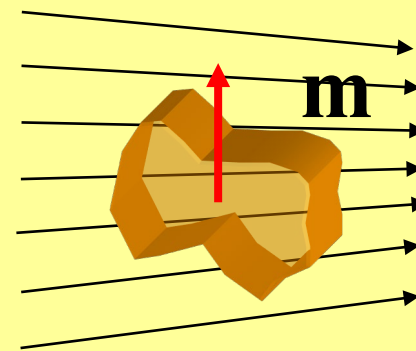


$\mathbf{F} = 0$  (pas de déplacement)

$\mathbf{N} \neq 0$  (rotation)

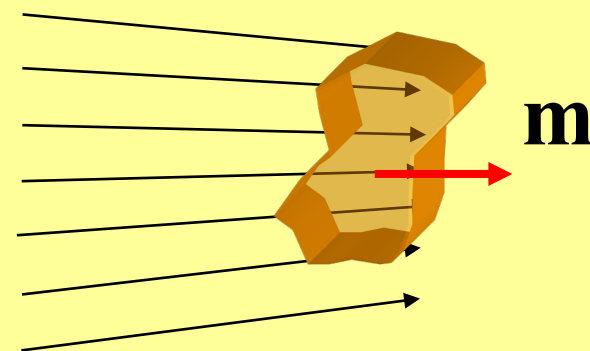


### Champ magnétique non-uniforme



$\mathbf{F} \neq 0$  (déplacement)

$\mathbf{N} \neq 0$  (rotation)



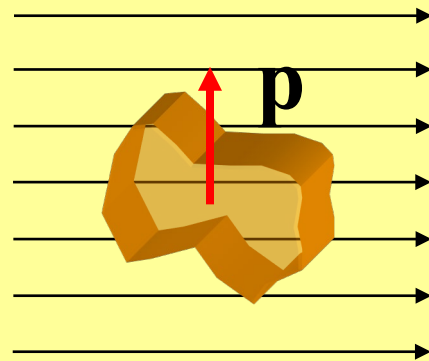
$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

Force

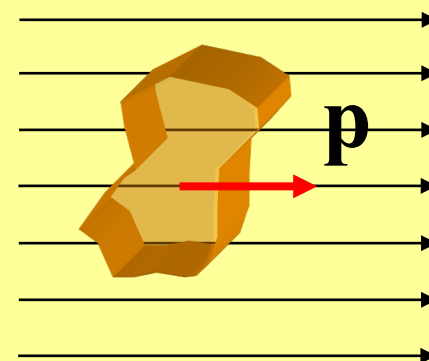
Couple

### Champ électrique uniforme

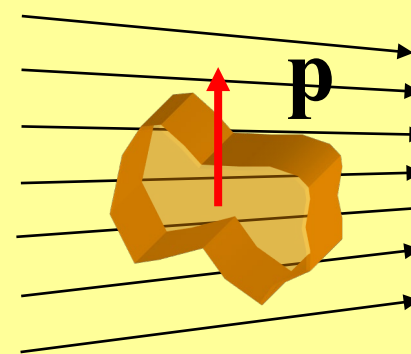


$\mathbf{F} = 0$  (*pas de déplacement*)

$\mathbf{N} \neq 0$  (*rotation*)

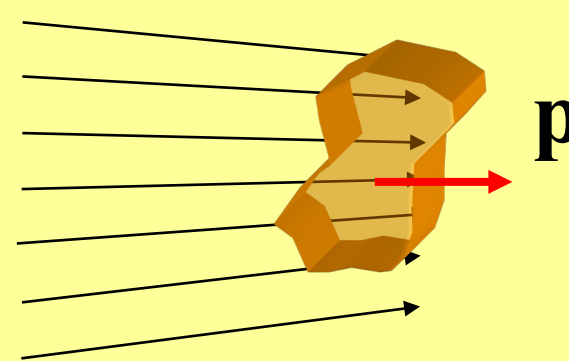


### Champ électrique non-uniforme

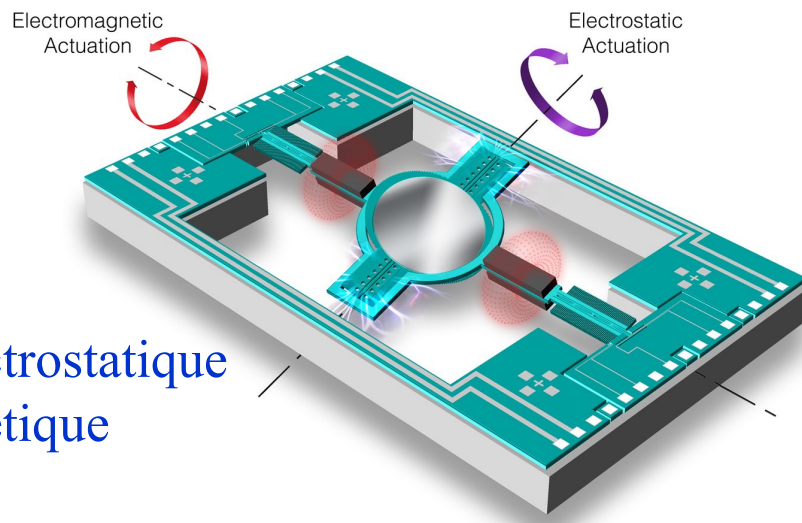


$\mathbf{F} \neq 0$  (*déplacement*)

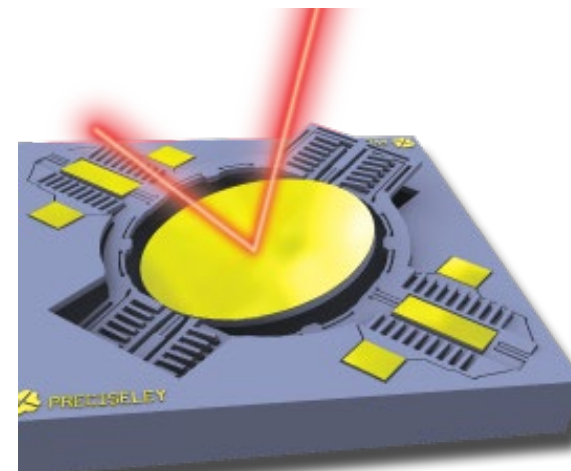
$\mathbf{N} \neq 0$  (*rotation*)



# Applications «microtechnique» des forces et couples électro/magnéto statiques

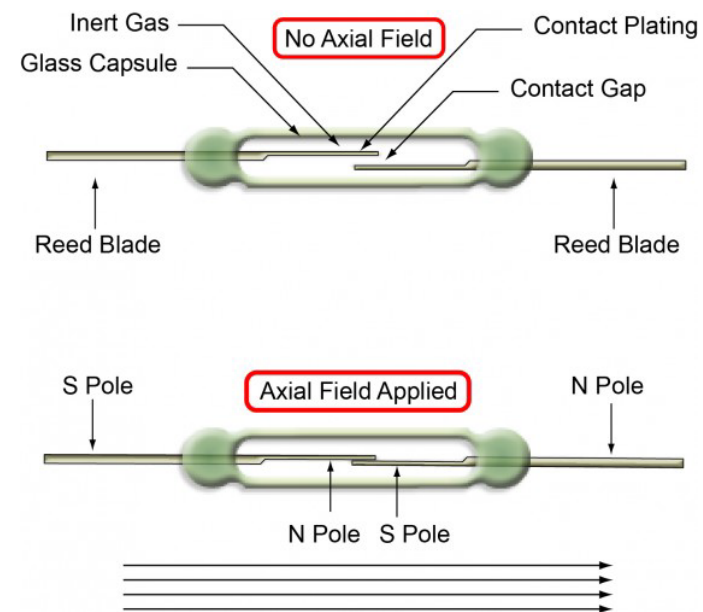
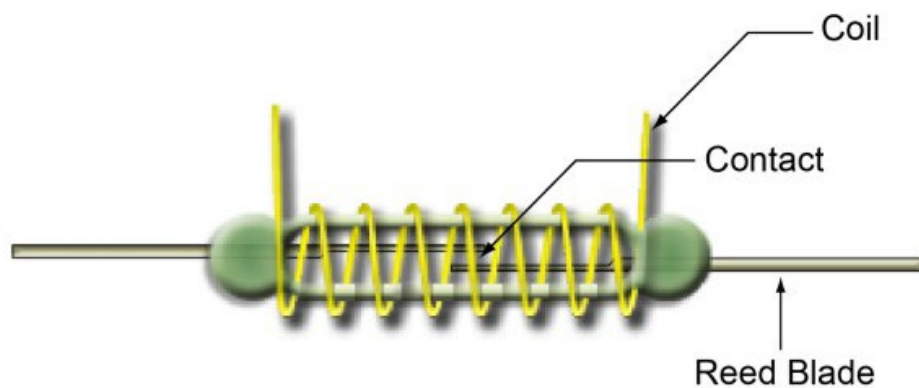


Actionneur électrostatique et électromagnétique

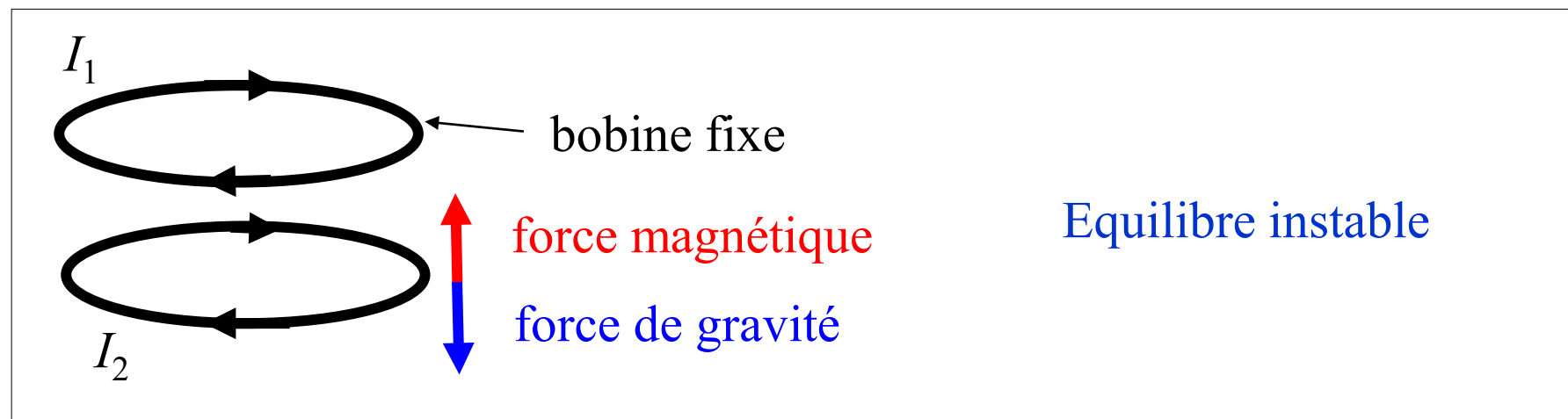
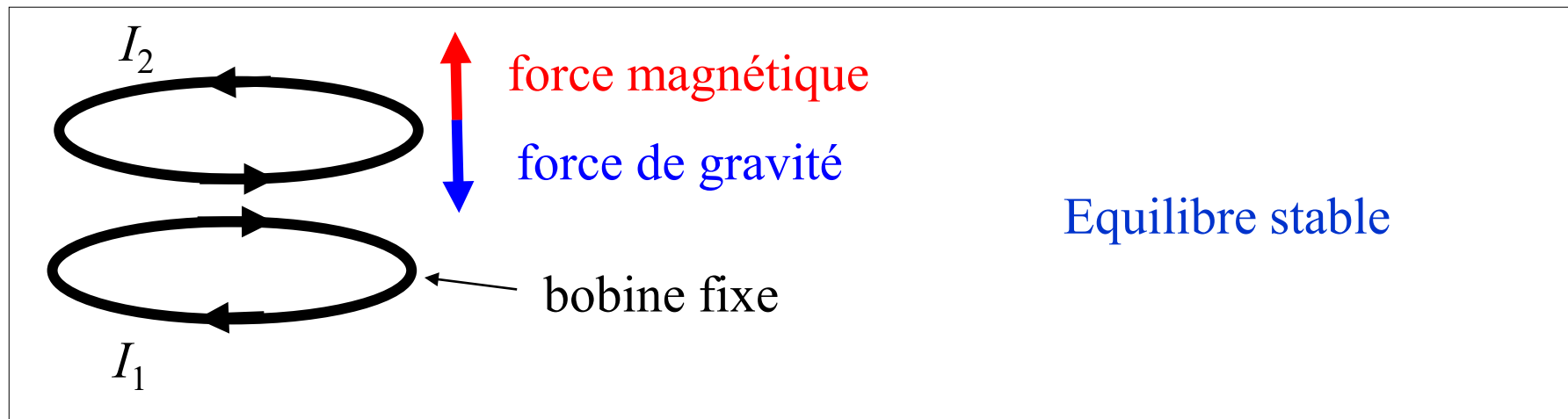


Actionneur électrostatique

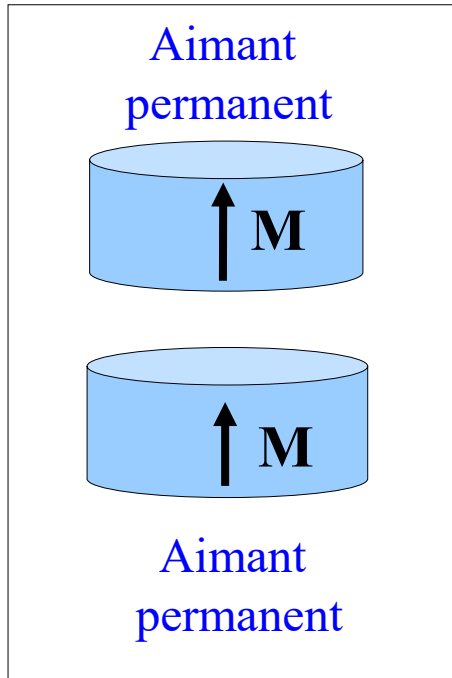
Actionneur magnétostatique



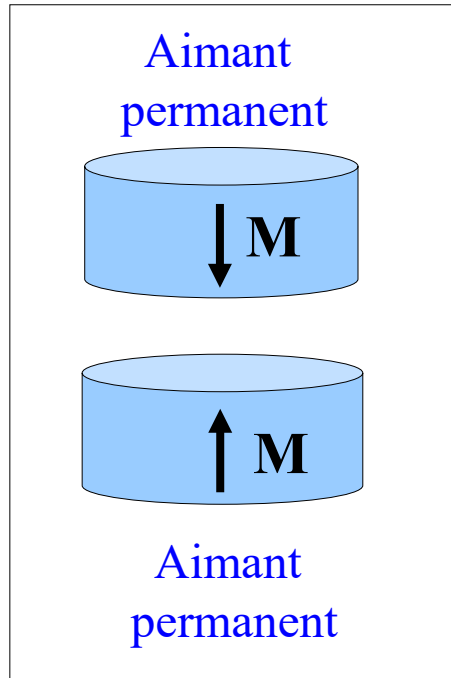
# Lévitation magnétique d'une boucle avec courant



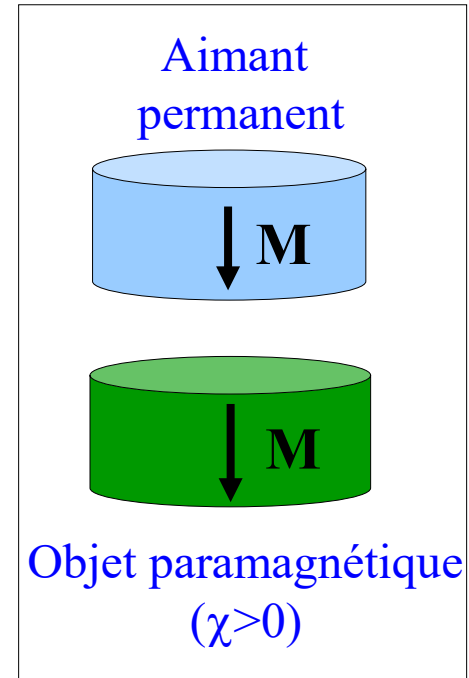
# Levitation magnétique



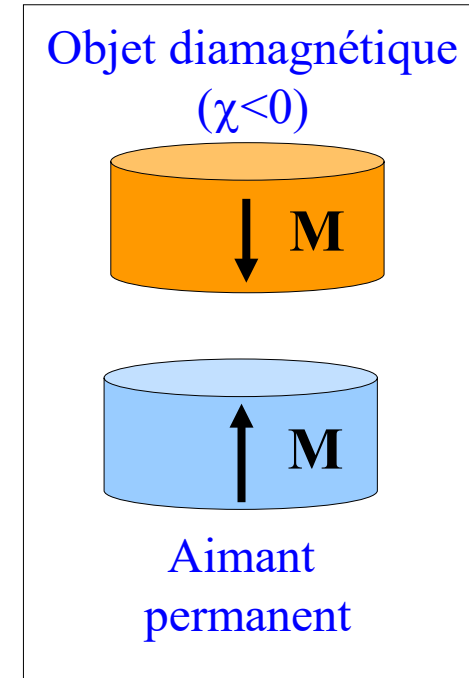
Non-équilibre



Equilibre «presque stable»  
(rotation)



Non-équilibre



Equilibre «presque stable»  
(rotation)

# Levitation (et propulsion) magnétique



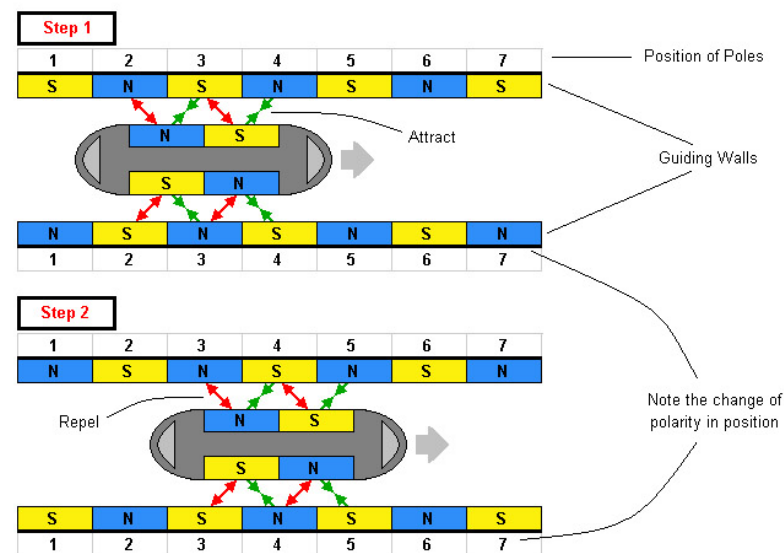
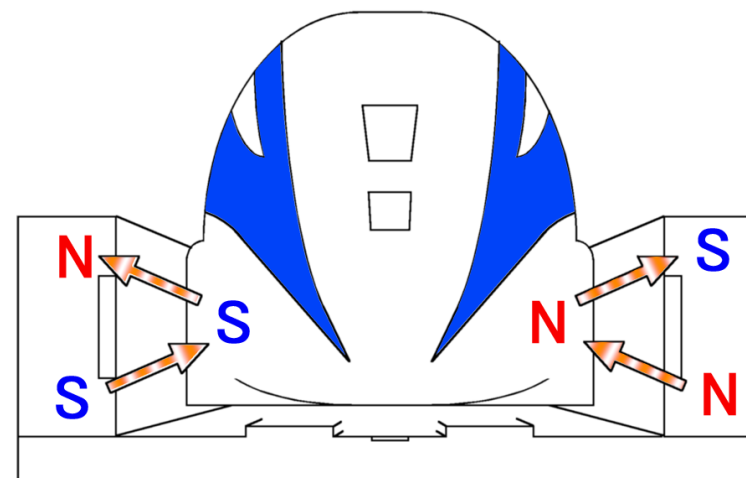
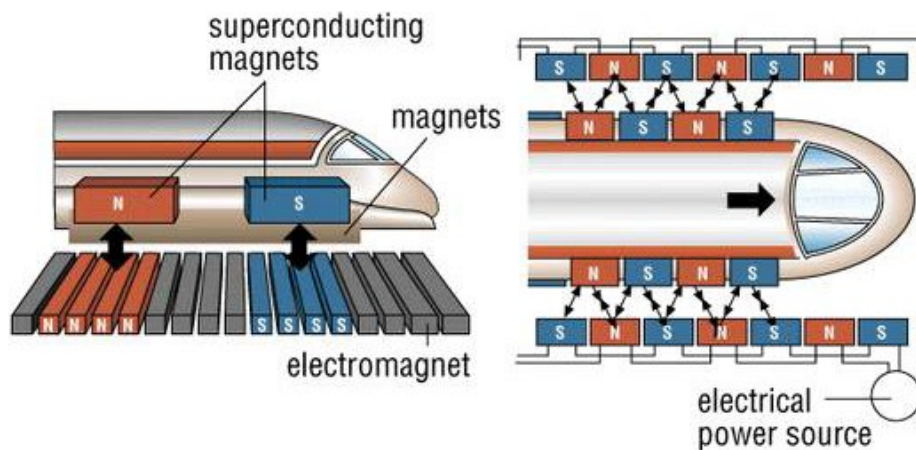
Maglev Train, Shanghai, China

Opening: 2004

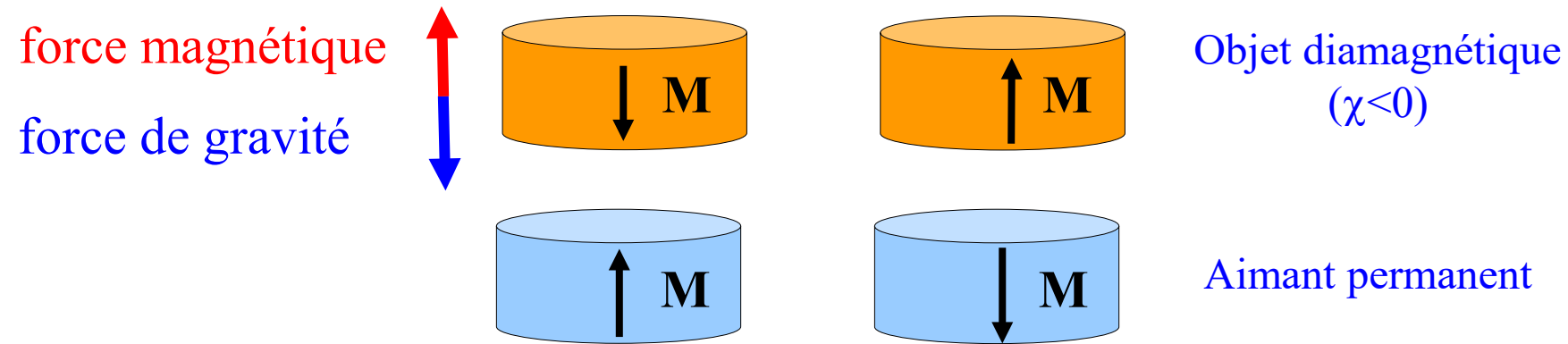
Speed: 430 km/h (operational), 501 km/h (max)

Length: 153 m, Width: 3.7 metres, Height: 4.2 m

Passengers: 574



# Lévitation d'un objet diamagnétique



Energie potentielle

$$U_B \cong -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

$$U_G \cong mgh$$

Force

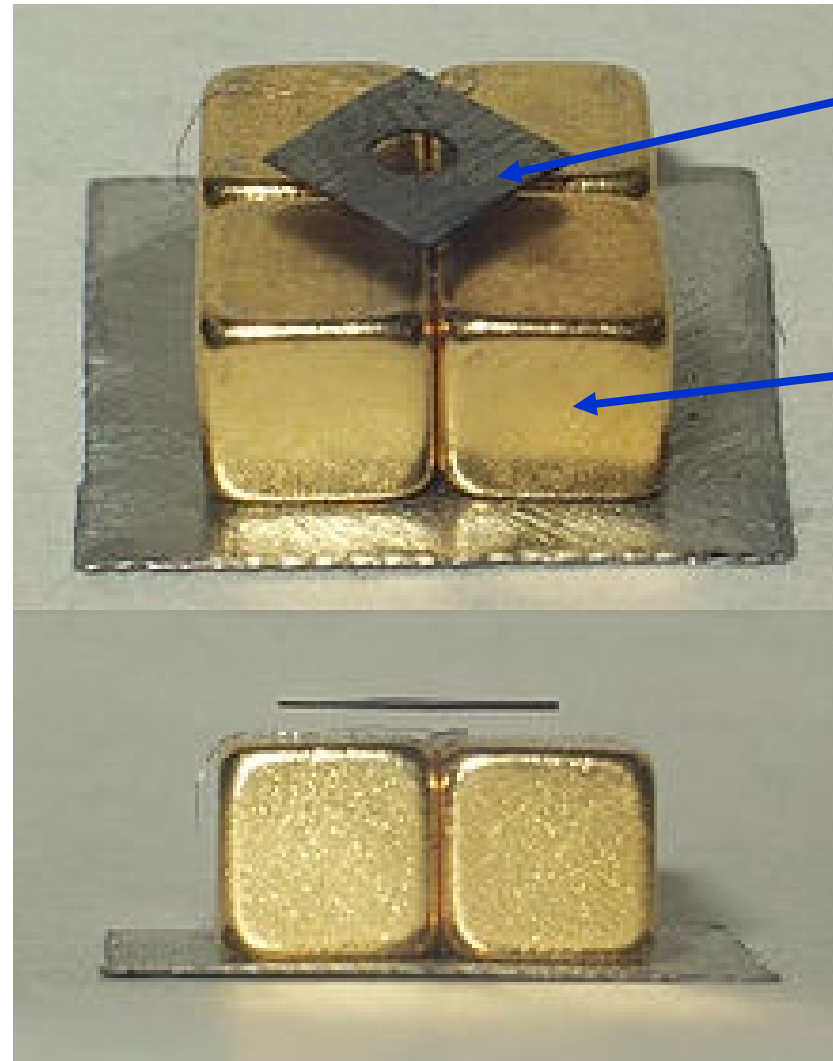
$$\mathbf{F}_B = -\nabla U_B \cong \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{F}_G = -\nabla U_G = m\mathbf{g}$$

Position

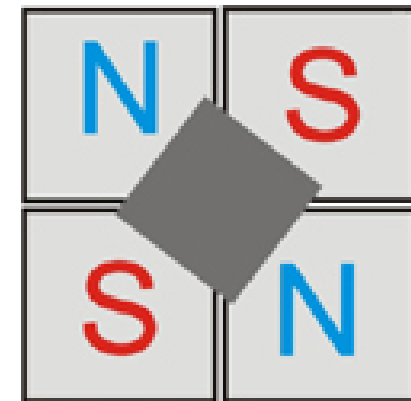
$$\mathbf{F}_B + \mathbf{F}_G = 0$$

## 1. Lévitration à l'aide d'aimants permanents



Objet **diamagnétique**  
(graphite pyrolytique (HOPG))

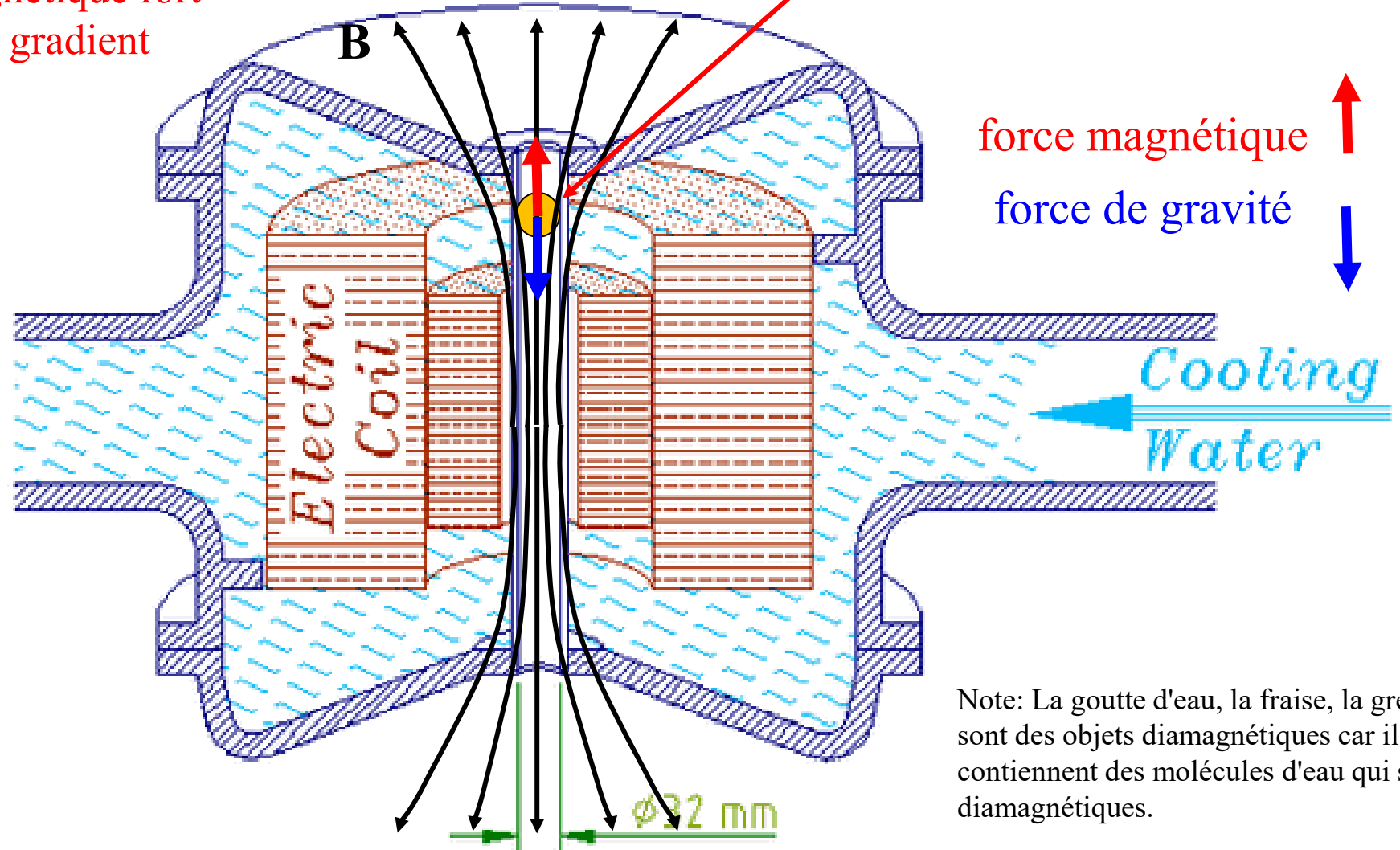
Aimant permanent  
(NdFeB)



## 2. Lévitation à l'aide d'une bobine solénoïdale

Champ magnétique fort  
avec un fort gradient

Objet diamagnétique  
(goutte d'eau, fraise, grenouille, ...)



Note: La goutte d'eau, la fraise, la grenouille sont des objets diamagnétiques car ils contiennent des molécules d'eau qui sont diamagnétiques.

$V$  : volume de l'objet ( $\text{m}^3$ )

$m$  : masse de l'objet  $m = \rho V$  (kg)

$\rho$  : densité de l'objet ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )

$$\mathbf{F}_B = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{m} \cong \mathbf{M}V \cong \chi_m \mathbf{H}V \cong \chi_m \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} V$$

$$\mathbf{F}_G = mg$$

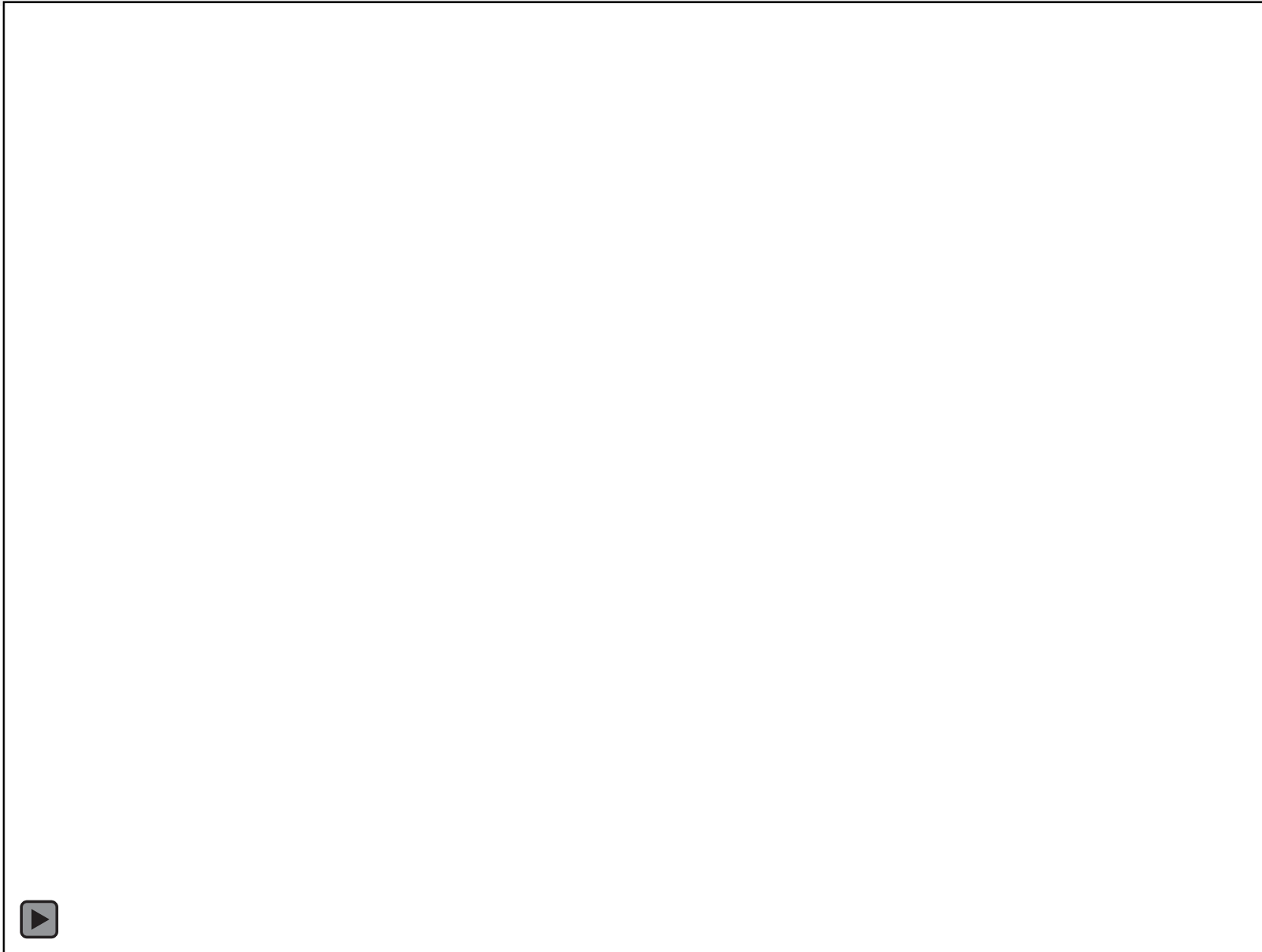
$\Rightarrow$

$$\mathbf{F}_G = \mathbf{F}_B \Leftrightarrow mg = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \Leftrightarrow$$

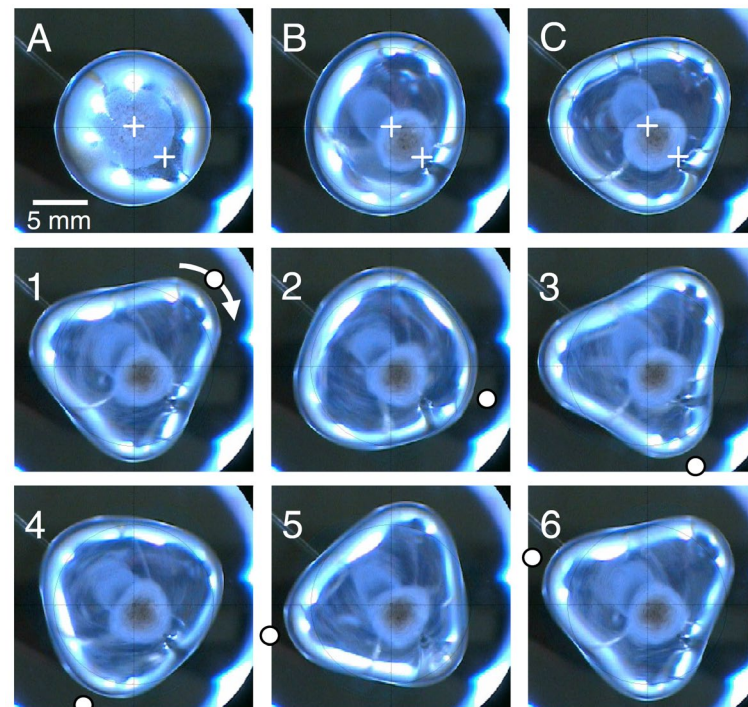
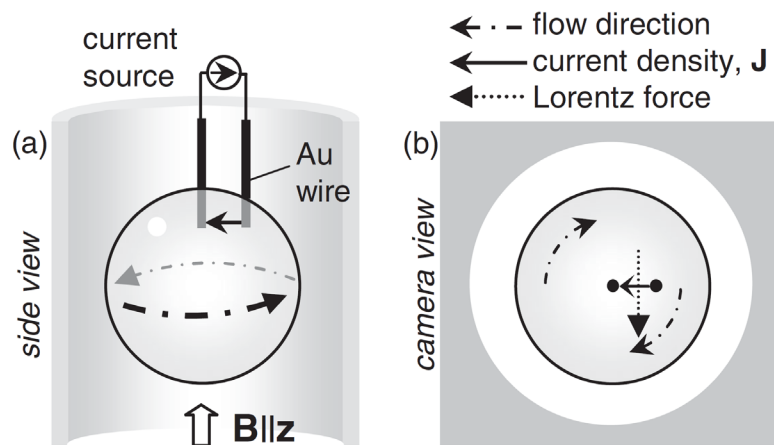
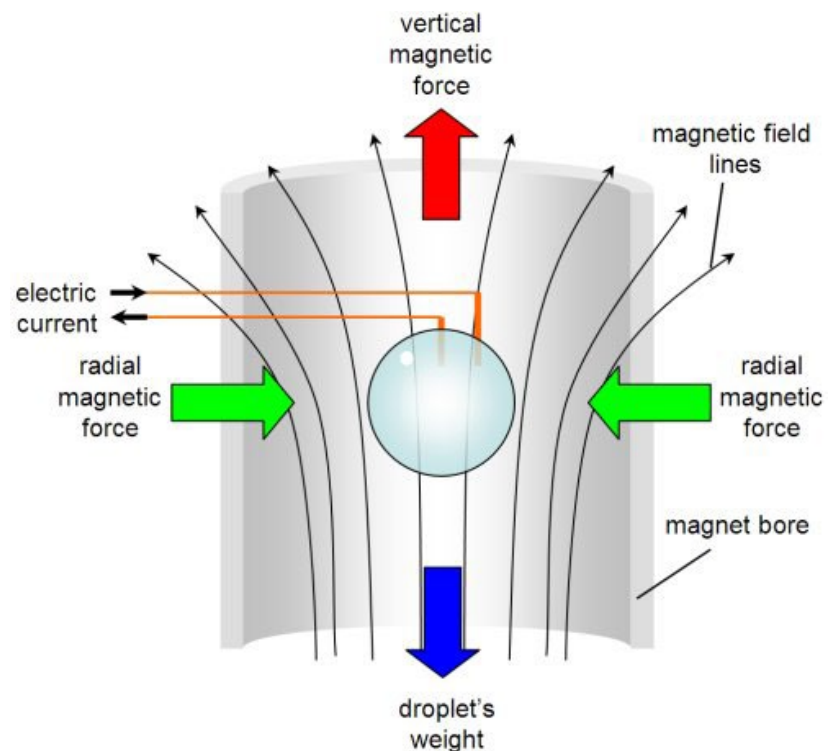
$$\rho Vg = \chi_m \frac{B}{\mu_0} V \nabla B \Leftrightarrow \rho g = \chi_m \frac{B}{\mu_0} \nabla B$$







# Lévitation et rotation d'un objet diamagnétique conducteur



A 1,5 ml de gouttelettes en lévitation.

(A) Non tournant.

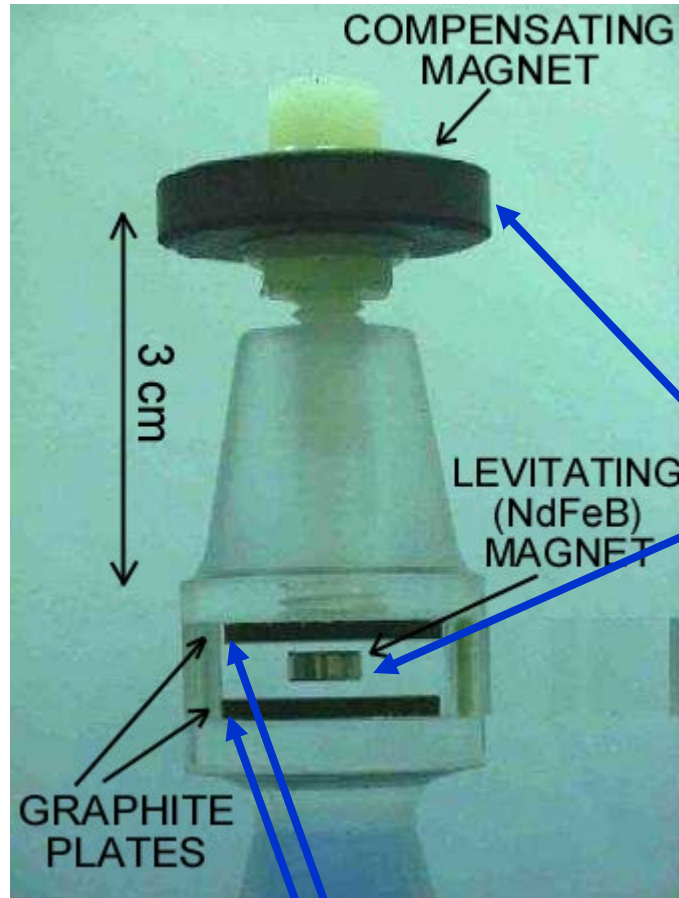
(B) Liquide tournant à 2 rps (gouttelettes ont un contour elliptique).

(C) Liquide tournant à 2,5 rps: l'équateur a la symétrie d'un triangle équilatéral. En (B), (C) le contour est pas tournant avec le fluide. Les croix indiquent les positions des électrodes.

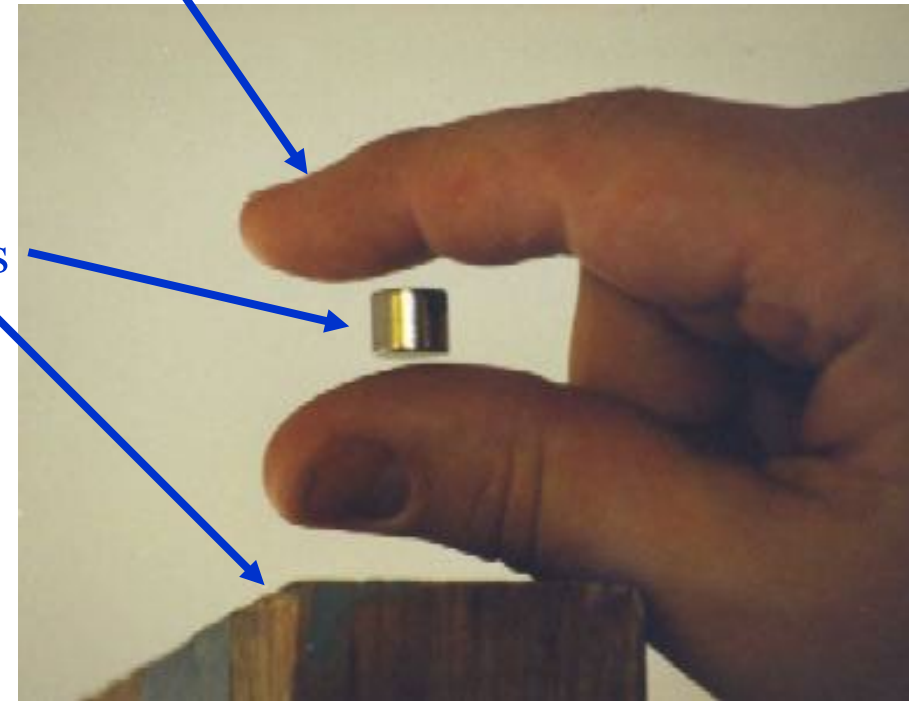
(1)-(6) images vidéo consécutives, 40 ms d'intervalle; ici la forme triangulaire du contour est en rotation avec le fluide dans la direction de la flèche à 3.33 rps. Les cercles blancs suivent un coin.

# Lévitaiton d'un objet ferromagnétique (stabilisé par un matériau diamagnétique)

Note: Les doigts sont des objets diamagnétiques car ils contiennent des molécules d'eau qui sont diamagnétiques.



“Objets” diamagnétique (doigts)

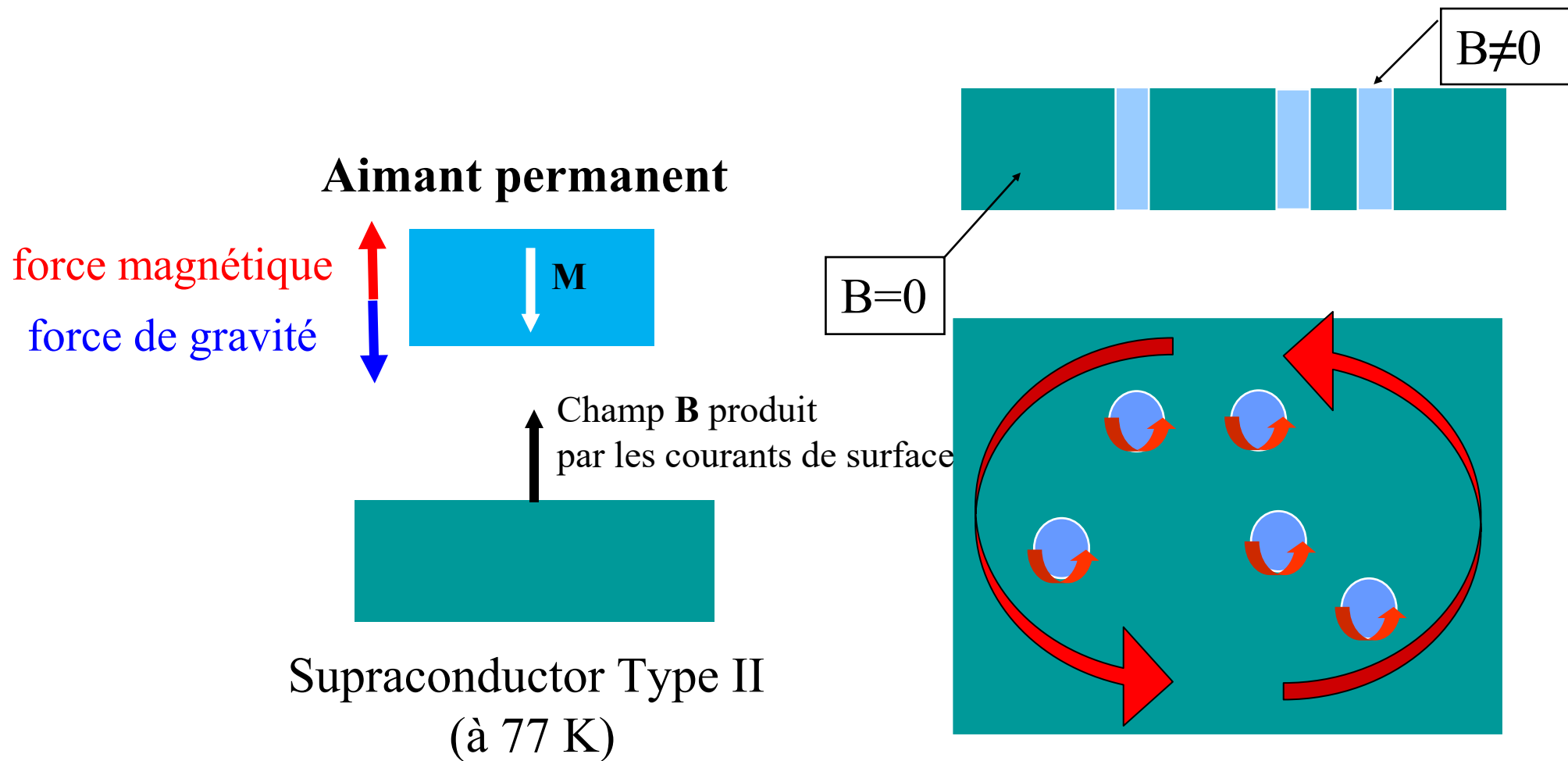


[Nature 400, 323-324 \(July 22 1999\)](#)

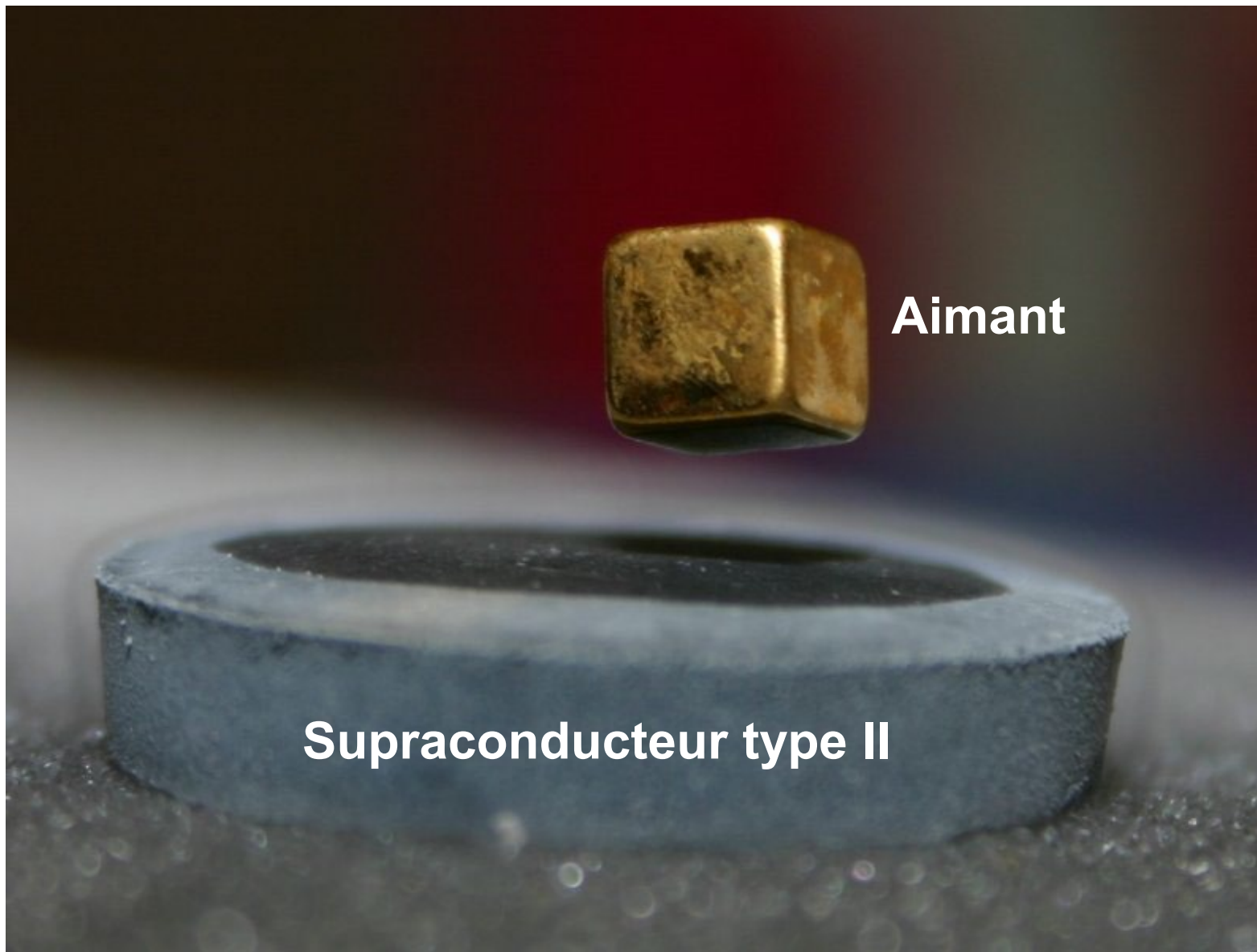
Objets diamagnétique

Aimant permanents

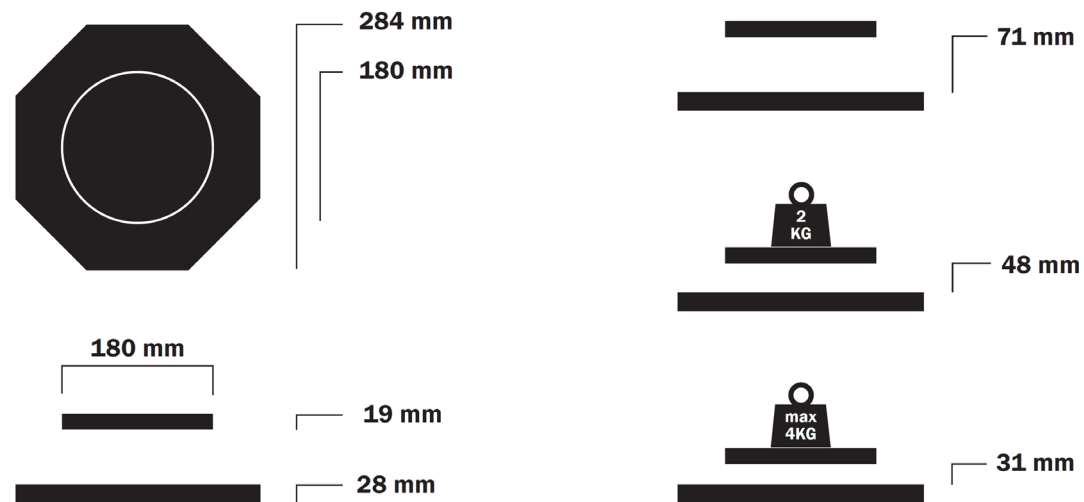
# Lévitation d'un objet ferromagnétique (stabilisé par un supraconducteur de type II)



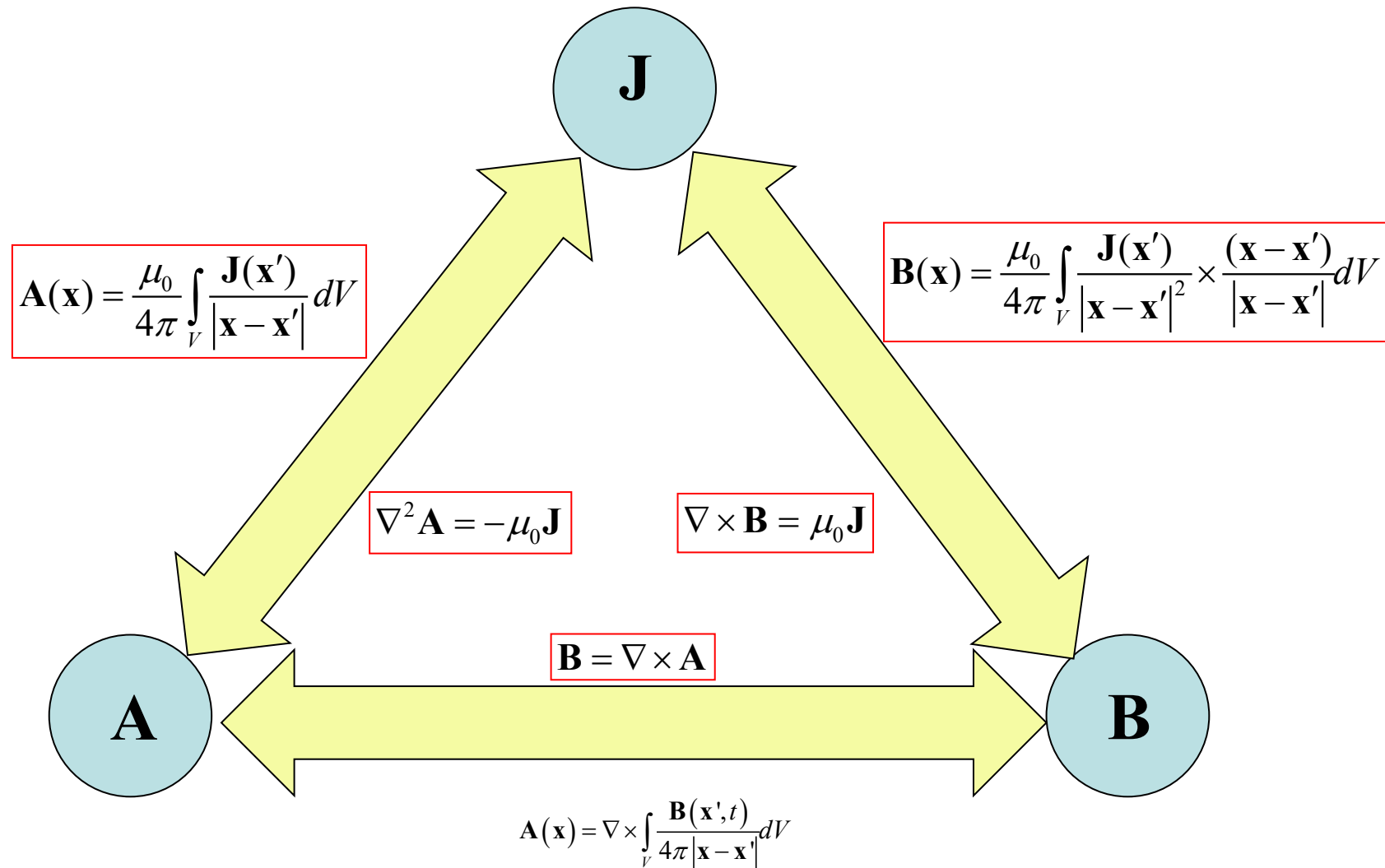
- Le champ  $B$  pénètre seulement dans les «tourbillons»
- Les courants de surface annulant le champ externe à l'intérieur du matériau (sauf dans les «tourbillons»)



# Lévitaiton d'un objet ferromagnétique (stabilisé par des bobines avec courant)



# Résumé de la magnétostatique



# Analogies et différences électrostatique-magnétostatique

Champ **électrique** créé  
par une distribution  
de **charges statiques**

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} dV$$

$$d\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r^2} \mathbf{r}$$

Champ **magnétique** créé  
par une distribution  
de **courants stationnaires**

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} dV$$

$$d\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

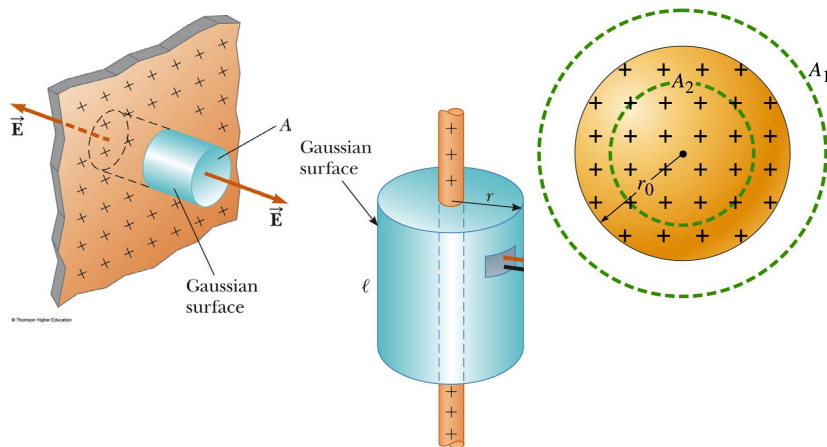
## Champ $\mathbf{E}$ créé par une distribution de charges statiques

Pour les problèmes avec «symétries» on utilise aussi:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

(Loi de Gauss)

*Intégrale de surface*



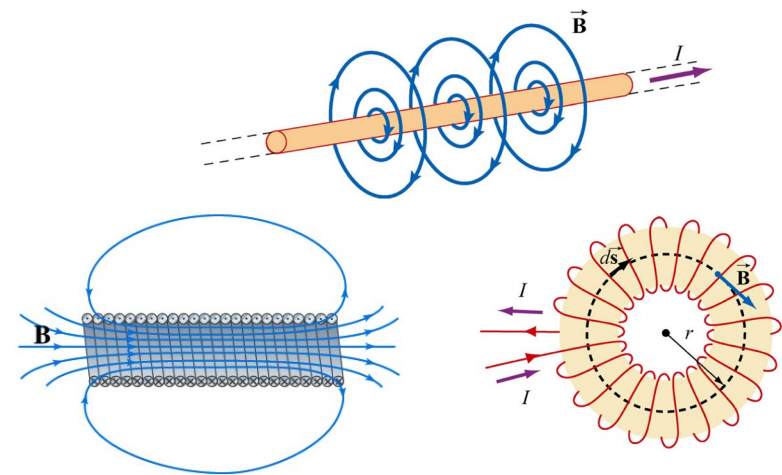
## Champ $\mathbf{B}$ créé par une distribution de courants stationnaires

Pour les problèmes avec «symétries» on utilise aussi:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

(Loi d'Ampère)

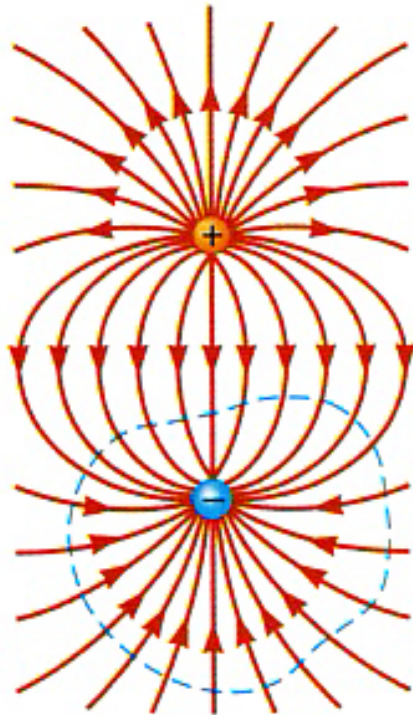
*Intégrale de ligne*



## Le flux du champ **électrique**

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

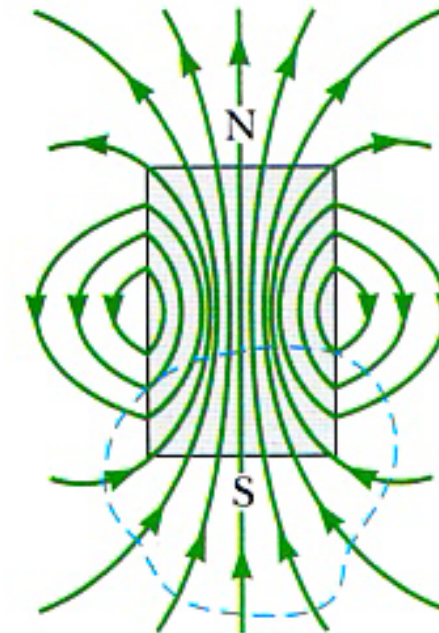
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



## Le flux du champ **magnétique**

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$



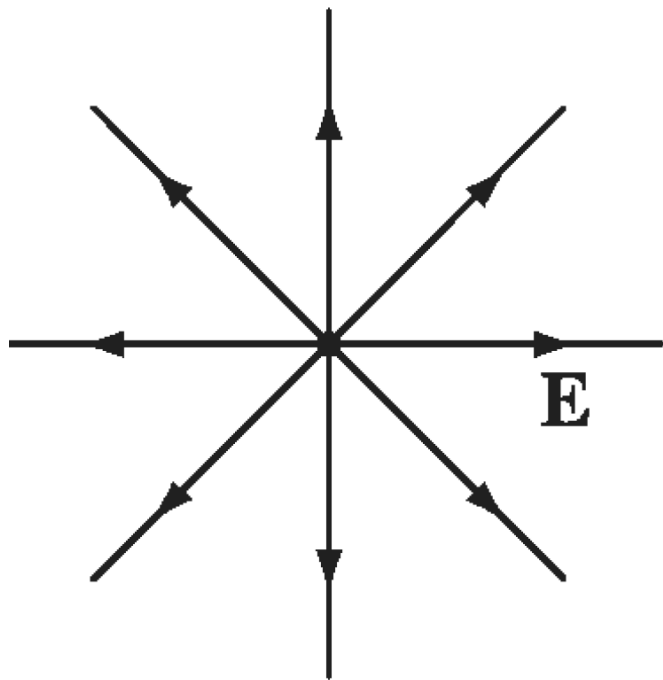
Interprétation:

Absence de “charges magnétiques” (monopoles)

Les lignes du champ  $\mathbf{B}$  sont toujours fermées

(pas de sources ni de puits)

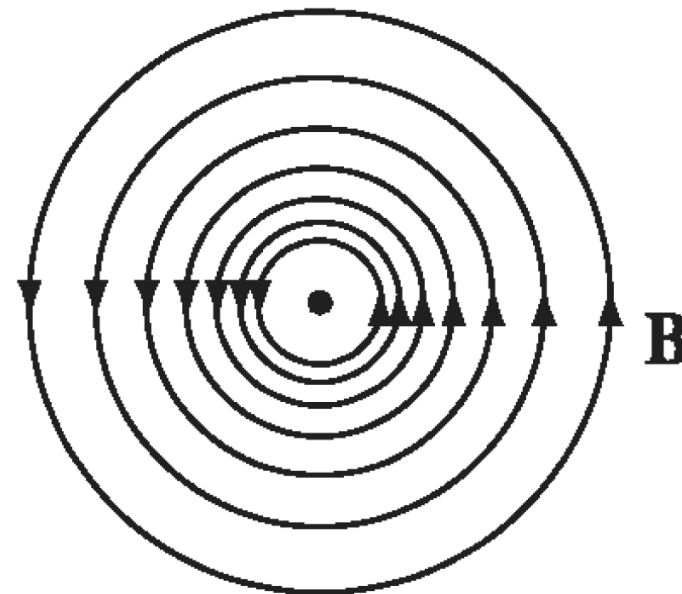
Champ électrique  
d'une charge ponctuelle



Densité d'énergie  
électrostatique

$$u_E = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$$

Champ magnétique  
d'un long fil



Densité d'énergie  
magnétostatique

$$u_B = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

## Le potentiel scalaire électrostatique

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V \Rightarrow$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

## Le potentiel vecteur magnétostatique

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \text{ (dans la jauge de Coulomb)}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

## Polarisation

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \frac{1}{dV} \left( \sum_{n(\text{molécules})} \mathbf{p}_n \right) = \frac{\mathbf{p}}{dV}$$

$\mathbf{p}_n$  : Dipôle électrique  
de l'atome ou molécule  $n$

**Polarisation:**  
Dipôle électrique  
par unité de volume

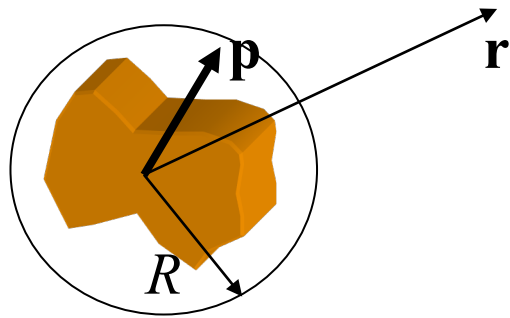
## Aimantation

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \frac{1}{dV} \left( \sum_{n(\text{molécules})} \mathbf{m}_n \right) = \frac{\mathbf{m}}{dV}$$

$\mathbf{m}_n$  : Dipôle magnétique  
de l'atome ou molécule  $n$

**Aimantation:**  
Dipôle magnétique  
par unité de volume

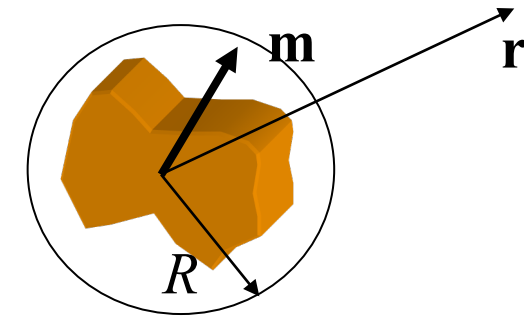
Champ électrique  
créé par  
un dipôle électrique



pour  $r \gg R$  :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{|\mathbf{r}|^3}$$

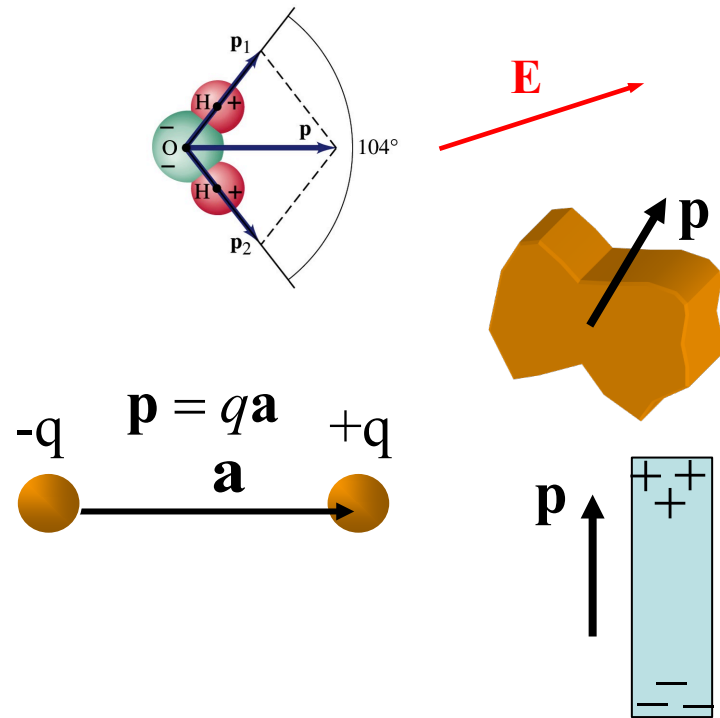
Champ magnétique  
créé par  
dipôle magnétique



pour  $r \gg R$  :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}}{|\mathbf{r}|^3}$$

## Dipôle électrique dans un champ électrique

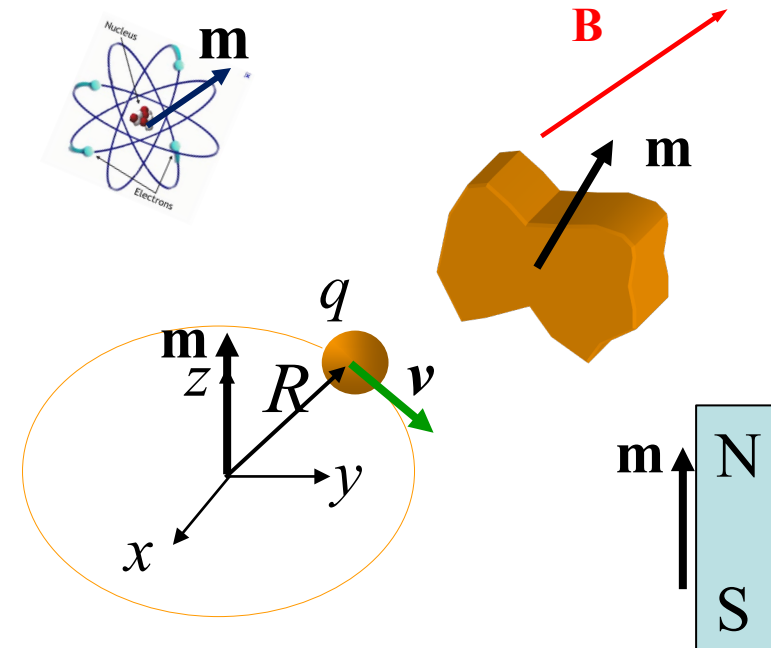


$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

$$U_E = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

## Dipôle magnétique dans un champ magnétique



$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

$$U_B = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$